

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

*Кудаева Ф.Х.¹, Вешнева И.В.²

¹*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова*

²*Саратовский национальный исследовательский
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского*

*kfatimat@yandex.ru

В работе для определения матрицы коэффициентов теплопроводности построена математическая модель. Найдены тепловые потоки многослойной среды. Функциональные зависимости температуры, отражающие теплофизические свойства определены из решения задачи с фазовыми переходами. Проведены численные расчеты на ЭВМ.

Ключевые слова: коэффициент теплопроводности, температурное поле, тепловой поток, временной переход, фазовый переход.

CONSTRUCTION OF A MATRIX OF THERMAL CONDUCTIVITY COEFFICIENTS

Kudayeva F.Kh.¹, Veshneva I.V.²

¹*Kabardino-Balkarian State University*

²*Saratov National Research University named after N.G. Chernyshevsky*

In this paper, a mathematical model is constructed to determine the matrix of thermal conductivity coefficients. The heat fluxes of a multilayer medium are found. Functional temperature dependences reflecting thermophysical properties are determined from solving the problem with phase transitions. Numerical calculations were carried out on a computer.

Keywords: coefficient of thermal conductivity, temperature field, heat flow, time transition, phase transition.

В настоящее время при исследовании теплопередачи в средах с фазовыми переходами значительное внимание уделяется теплопроводности. При низкотемпературном воздействии на биологические ткани возникают границы раздела фаз.

При низкотемпературном воздействии одной из основных задач является задача распространения температуры по глубине биологической ткани. Как показывают теоретические исследования, создание точной математической модели такого процесса требует учета зависимости коэффициента теплопроводности от температуры и ее градиента.

Задачи расчета теплопередачи через многослойную среду путем теплопроводности с возможностью возникновения в отдельных слоях фазовых переходов возникают в криомедицине, криобиологии и в других областях [1, 2].

Расчет переноса теплоты (холода) в многослойных средах является сложной нелинейной задачей, не имеющей аналитического решения. Но для определения таких параметров как максимальные размеры замораживания, криопоражения и теплового возмущения особый интерес представляют стационарные задачи.

Математическая модель при низкотемпературном воздействии дает возможность определить зависимости, отражающие теплофизические свойства слоев биологической ткани.

Цель работы – построение математической модели матрицы коэффициентов теплопроводности при низкотемпературном воздействии на биологические ткани.

Объект исследования – многослойная среда биологической ткани при низкотемпературном воздействии.

Предмет исследования – матрица коэффициентов теплопроводности, низкотемпературное воздействие на биологическую ткань, математическое моделирование.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) определить функциональные зависимости температуры от толщины слоя биологической ткани;
- 2) вывести формулу для расчета коэффициента теплопроводности при низкотемпературном воздействии на биологические ткани;
- 3) а основе построенной математической модели провести расчеты на ЭВМ.

В работе использованы методы решения дифференциальных и матричных уравнений, теории вероятностей и математической статистики.

Полученные результаты найдут применение в криомедицине для расчета режимов низкотемпературного воздействия на биологическую ткань для многослойной среды эпидермиса.

Построение математической модели определения матрицы коэффициентов теплопроводности

Рассмотрим теплопроводность через эпидермис биологической ткани, где слои характеризуются теплофизическими свойствами, и построим математическую модель определения матрицы коэффициентов теплопроводности для многослойной среды эпидермиса при низкотемпературном воздействии.

Слои биологической ткани для моделирования разбиты на равномерные одинаковые ячейки (рис. 1).

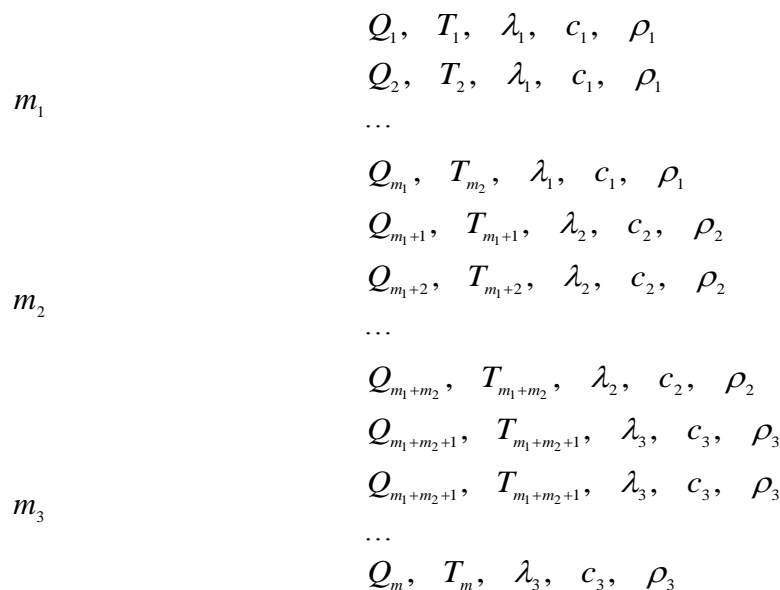


Рис. 1. Схема многослойной среды эпидермиса биологической ткани

Пусть $Q = \{q_j\}$, $j = 1, 2, \dots, m$ – значения количества теплоты (холода) в каждом слое эпидермиса биологической ткани, m – общее число слоев эпидермиса биологической ткани, j – номер слоя. Пусть Δt – промежуток времени перехода передачи количества теплоты (холода) из k -го слоя в $k+1$ слой.

Теплообмен в многослойной среде при низкотемпературном воздействии на биологическую ткань можно представить как процесс с дискретным шагом по времени и по координате, т. е., считая Δt постоянным числом, заменим непрерывное время t его дискретными моментами: $t_i = i \cdot \Delta t$, где i – целочисленные моменты условного времени. Далее будем считать, что тепловые свойства равномерно распределены по объему слоев биологической ткани.

Таким образом, связь между векторами состояния до и после k -го перехода описывается следующей матричной формулой [3, 4]:

$$Q^{k+1} = PQ^k, \quad (1)$$

где P – матрица переходных вероятностей, элементы которой p_{ij} показывают вероятность перехода количества теплоты (холода) из i -й ячейки в j -ую ячейку слоя биологической ткани.

Изменения количества теплоты (холода) между двумя соседними ячейками слоя j и $j+1$ в течение одного временного перехода при различных температурах T_1 и T_2 описываются формулами

$$\begin{aligned} Q_j^{k+1} &= Q_j^k - \Delta Q_j^k = Q_j^k - \lambda_j S (T_j^k - T_{j+1}^k) \frac{\Delta t}{\Delta x} = \\ &= Q_j^k - \lambda_j S \left(\frac{Q_j^k}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j} - \frac{Q_{j+1}^k}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}} \right) \Delta t = \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j} \right) Q_j^k + \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}} Q_{j+1}^k; \\ Q_{j+1}^{k+1} &= Q_{j+1}^k + \Delta Q_{j+1}^k = \\ &= \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_j \Delta x_j} Q_j^k + \left(1 - \frac{\lambda_j S \Delta t}{c_j \rho_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}} \right) Q_{j+1}^k, \end{aligned} \quad (3)$$

где λ_j – коэффициент теплопроводности, S_j – площадь поверхности ячейки биологической ткани, V_j – объем ячейки биологической ткани, c_j – теплоемкость слоя биологической ткани, ρ_j – плотность слоя биологической ткани, h_j , $j = 1, 2, \dots, m$ – толщина j -ой ячейки слоя.

Предположим, что результирующее распределение температур строится в поперечном направлении, что означает, что модель будет базироваться на одномерной цепи Маркова, и площади ячеек биологической ткани равны единице. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\frac{S}{V_j} = \frac{1}{\Delta x_j}, \quad \frac{S}{V_{j+1}} = \frac{1}{\Delta x_{j+1}}. \quad (4)$$

С учетом (4), соотношения (2), (3) могут быть записаны в матричной форме

$$\begin{pmatrix} Q_{j+1}^k \\ Q_{j+1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_j^2} \right) & \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_{j+1}^2} \\ \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_j^2} & \left(1 - \frac{\lambda_j \Delta t}{c_j \rho_j \Delta x_{j+1}^2} \right) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Из (2) находим формулу для расчета коэффициента теплопроводности слоев биологической ткани

$$\lambda_j = \frac{(Q_j^{k+1} - Q_j^k) V_j \Delta x_j R_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}}{(Q_{j+1}^{k+1} V_j \Delta x_j - Q_j^k V_{j+1} \Delta x_{j+1}) M}, \quad (6)$$

где $R_j = c_j \rho_j$, $M = S \Delta t$.

Из (3) получаем

$$\lambda_j = \frac{R_j (Q_{j+1}^{k+1} - Q_{j+1}^k) V_j \Delta x_j V_{j+1} \Delta x_{j+1}}{M (Q_j^k V_{j+1} \Delta x_{j+1} - Q_{j+1}^k V_j \Delta x_j)}. \quad (7)$$

Количество теплоты (холода), передаваемое за один временной интервал верхнему ($j=1$) слою и нижнему ($j=m$) слою биологической ткани вычислим по формулам:

$$Q_1^{k+1} = Q_1^k + \alpha_1 S(T_{\text{всл}}^k - T_1^k) \Delta t, \quad (8)$$

$$Q_m^{k+1} = Q_m^k + \alpha_2 S(T_{\text{нсл}2}^k - T_m^k) \Delta t, \quad (9)$$

где α_1, α_2 – коэффициенты теплопередачи, $T_{\text{всл}}^k$ – температура воздуха над верхним слоем биологической ткани, $T_{\text{нсл}2}^k$ – температура воздуха под нижним слоем биологической ткани, причем $T_{\text{всл}}^k$ и $T_{\text{нсл}2}^k$ имеют постоянные значения в стационарном случае.

Для проверки закона сохранения полного запаса количества теплоты в объеме всех слоев биологической ткани строится переходная матрица вероятностей из k -го слоя в $k+1$ -слой. Переходная матрица описывает эволюцию аддитивного свойства, подчиненного закону сохранения полного запаса количества теплоты в объеме всех слоев биологической ткани. Поэтому сумма элементов матрицы в каждом столбце должна быть равна единице, а суммы элементов по строкам в общем случае не равны единице, что свидетельствует о неравномерности асимптотического распределения запасов теплоты (холода) по слоям. Элементы матрицы не должны быть также отрицательными, что накладывает ограничение на выбор продолжительности временного перехода, размера ячейки и количества слоев. При невыполнении этого условия вычислительная процедура оказывается неустойчивой.

Структура матрицы переходных вероятностей имеет вид

$$\begin{array}{cccccc} p_{11} & p_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p_{m-1,m-1} & p_{m-1,m} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & p_{m,m-1} & p_{m,m} \end{array} \quad (10)$$

где

$$p_{j+1,j} = \frac{\lambda_j \Delta t}{R_j \Delta x^2}, \quad p_{j-1,j} = \frac{\lambda_{j-1} \Delta t}{R_j \Delta x^2}, \quad (11)$$

где Δx – размер ячейки (площадь поверхности и объем ячейки). Т. к. $S=1$, то объем зависит от толщины $h_j, j = 1, 2, \dots, m$. Суммарная вероятность матрицы переходных вероятностей равна единице

$$p_{j,j} + p_{j+1,j} + p_{j-1,j} = 1. \quad (12)$$

Для определения теплового потока используем формулу

$$Q_j^k = \rho_j c_j \Delta x_j T_j^k, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m. \quad (13)$$

Входными данными модели являются: количество ячеек, размер ячейки (толщина ячейки, площадь ячейки равна единице), плотность слоя биологической ткани, теплоемкость слоя биологической ткани, коэффициент теплообмена с окружающей средой, значение температуры внутри слоя биологической ткани, количество временных переходов из одного слоя в другой слой.

Построение матрицы коэффициентов теплопроводности при плоско-параллельной гипотермии (стационарный случай)

Рассмотрим случай плоскопараллельной гипотермии и криодеструкции биологической ткани в медицине (стационарный случай).

Для построения матрицы коэффициентов теплопроводности выбрана линейная зависимость температуры от толщины слоя эпидермиса

$$T(x) = -13,892x + 31,728. \quad (14)$$

Достоверность аппроксимации температуры зависимостью (14) составляет 99,64 %.

Расчеты можно провести, используя функциональную зависимость температуры от пространственной переменной, описываемой квадратичной функцией

$$T(x) = 6,2718x^2 - 15,831x + 31,828. \quad (15)$$

Достоверность аппроксимации температуры зависимостью (15) составляет 99,76 %.

Зависимость (15) носит колебательный характер, что плохо при низкотемпературном воздействии на биологическую ткань, поэтому для расчета выбрана (14).

Протяженность рогового слоя эпидермиса составляет до 10 мкм, толщина от 100 нм до 1 мкм, количество слоев от 15 до 20 в толстой коже, от 3 до 4 слоев в тонкой коже.

Разобьем роговой слой на три слоя, а также разобьем слои на ячейки. Пусть протяженность каждой ячейки составляет 1 мкм.

Входными данными для расчетов на ЭВМ являются: количество (слоев) эпидермиса: 1-ый слой – 2, 2-ой слой – 2, третий слой – 3; количество (ячеек) – 3. Свободная граница области в расчетах равна 3,5. Область биологической ткани разбита по толщине эпидермиса с шагом 3,5/7, где число 7 – это общее количество слоев эпидермиса. Температуры по слоям найдены по формуле (11) и они соответственно равны: 24,782; 17,836; 10,89; 3,944; –3,002; –9,948; –16,894.

Полученные результаты – толщина и температура каждого слоя, которые представлены в матрицах.

$$X = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3.5 & 3.5 & 3.5 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 24.782 & 24.782 & 24.782 \\ 17.836 & 17.836 & 17.836 \\ 10.89 & 10.89 & 10.89 \\ 3.944 & 3.944 & 3.944 \\ -3.002 & -3.002 & -3.002 \\ -9.948 & -9.948 & -9.948 \\ -16.894 & -16.894 & -16.894 \end{pmatrix}.$$

Теплоемкость в первом слое – 0,36; во втором слое – 0,36; в третьем слое – 0,37.

Плотность в первом слое – 0,12; во втором слое – 0,14; в третьем слое – 0,15.

Площади ячеек равны единице, а объем зависит от толщины ячеек слоя.

Суммарное время воздействия (секунд) составляет:

- первый слой – 4,28571428571429;
- второй слой – 8,57142857142857;
- третий слой – 12,8571428571429;
- четвертый слой – 17,1428571428571;
- пятый слой – 21,4285714285714;
- шестой слой – 25,7142857142857;
- седьмой слой – 30.

Коэффициент теплоотдачи в верхний слой биологической ткани составляет – 0,5, а коэффициент теплоотдачи под нижний слой биологической ткани – 0,4, температура внешней среды биологической ткани – 28, температура под нижним слоем биологической ткани – 36.

Применяя формулу (13) найдены тепловые потоки по слоям биологической ткани

$$Q = \begin{pmatrix} 0,53552912 & 0,53552912 & 0,53552912 \\ 0,7705152 & 0,7705152 & 0,7705152 \\ 0,823284 & 0,823284 & 10,823284 \\ 0,3975552 & 0,3975552 & 0,3975552 \\ -0,416527 & -0,416527 & -0,416527 \\ -1,656342 & -1,656342 & -1,656342 \\ -3,28165 & -3,28165 & -3,28165 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица коэффициентов теплопроводности

$$\lambda = \begin{pmatrix} 0,09167997706206 & 0,091679977062062 & 0,091679977062062 \\ 0,00110622549875 & 0,001106225498759 & 0,001106225498759 \\ 0,17187109722689 & 0,171871097226895 & 0,171871097226895 \\ 0,05707387743393 & 0,05707387743393 & 0,05707387743393 \\ 0,07340242529255 & 0,07340242529255 & 0,07340242529255 \\ 0,11916360421385 & 0,11916360421385 & 0,11916360421385 \\ 0,47889411184256 & 0,478894111842568 & 0,47889411184256 \end{pmatrix}.$$

Полученные результаты показывают изменение коэффициента теплопроводности эпидермиса по выделенным слоям.

Что касается других слоев кожи (дерма, гиподерма), то этот вопрос остается открытым. Это связано с тем, что низкотемпературное воздействие на эти слои в силу их сложной структуры (наличие кровеносных сосудов и др.) может привести к необратимым процессам.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построена матрица коэффициентов теплопроводности в многослойной среде эпидермиса биологической ткани при низкотемпературном воздействии.

Как видно из матрицы, значение коэффициента теплопроводности зависит от следующих параметров: толщины слоя биологической ткани, теплоемкости, плотности, температуры биологической ткани. Значение коэффициента теплопроводности увеличивается с увеличением толщины слоя, что означает, что чем глубже располагается слой биологической ткани, подлежащий низкотемпературному воздействию, тем температуру воздействия на биологическую ткань рекомендуется понижать.

Библиография

1. Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А. Хашхожева Д.А. Задача со свободными границами в медицине // Южно-Сибирский научный вестник. 2022. № 6. С. 8–12.
2. Кудаева Ф.Х. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ для описания низкотемпературных процессов криовоздействия на биологические ткани // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 2. С. 107–114.
3. Мизонов В.Е., Митрофанов А.В., Басова Е.В., Шуина Е.А. Теоретическое исследование нелинейной теплопроводности в многослойной среде с фазовыми переходами в слоях // Вестник ИГЭУ. 2020. Вып. 1. С. 53–59.
4. Мизонов В.Е., Митрофанов А.В., Басова Е.В., Шуина Е.А. Ячеечная модель теплопроводности в многослойной среде с переменным числом слоев // Вестник ИГЭУ. 2020. Вып. 3. С. 51–57.