УДК 536.2

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

Канарейкин А.И.

Российский государственный геологоразведочный университет им. Серго Орджоникидзе

kanareykins@mail.ru

Работа посвящена вопросам стационарного теплопереноса. В ней рассматривается вопрос о нахождении распределения температурного поля тела бесконечной длины с эллиптическим поперечным сечением при граничных условиях второго рода. С помощью методов дифференцирования, интегрирования и разложения в ряд было получено аналитическое решение задачи. Полученный результат был интерпретирован. Общее решение задачи совпадает с решением, полученным в одной из работ автора для подобного случая только при граничных условиях третьего рода, что говорит о достоверности полученного результата.

Ключевые слова: теплообмен, температурное поле, стационарная теплопроводность, уравнение Пуассона, уравнение Лапласа, граничные условия второго рода, краевая задача, задача Неймана.

SOLUTION OF THE NEUMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE POISSON EQUATION IN AN ELLIPTIC BODY

Kanareykin A.I.

Sergo Ordzhonikidze Russian State Geological University

The work is devoted to the issues of stationary heat transfer. It considers the problem of finding the distribution of the temperature field of a body of infinite length with an elliptical cross section under boundary conditions of the second kind. Using the methods of differentiation, integration and decomposition into a series, an analytical solution to the problem was obtained. The result was interpreted. The general solution of the problem coincides with the solution obtained in one of the author's works for such a case only under boundary conditions of the third kind. Which indicates the reliability of the result obtained.

Keywords: heat transfer, temperature field, stationary thermal conductivity, Poisson equation, Laplace equation, boundary conditions of the second kind, boundary value problem, Neumann problem.

Введение

Развитие современной энергетики и новых отраслей техники сопровождается резким повышением теплонапряжённости элементов конструкции. В этих условиях к тепловым расчётам предъявляются всё более и более высокие требования. В связи с этим задачи исследования специальных средств для обеспечения интенсивного отвода тепла от источников с высокими тепловыми нагрузками, а также создания новых типов интенсификаторов теплопередачи становятся наиболее важными и актуальными.

Интенсификация теплообмена при разных видах движения теплоносителя вблизи поверхности нагрева является одной из актуальных проблем, с решением которой связано создание компактных и эффективных теплообменных аппаратов [1–6]. Наиболее доступным и широко распространенным способом интенсификации со стороны среды с меньшим коэффициентом теплоотдачи в теплообменном аппарате является развитие поверхности теплообмена. Один из наиболее эффективных способов интенсификации процесса теплообмена – использование теплообменных поверхностей сложной геометрии.

Моделирование нагрева твердых тел различной геометрии на сегодняшний день находит свое применение в различных областях науки и техники в виде численных методов решения задачи нестационарной теплопроводности. В приложениях математической теории теплопроводности немаловажное место занимает сравнительно новый класс обобщённых краевых задач с заданной границей. Важной задачей математической физики является исследование процесса теплопроводности в телах с различной геометрической формой. Особое место занимают тела с эллиптическим сечением [7–10]. Их особенность состоит в том, что манипулируя с изменением длины полуосей эллипса, удаётся получить точные аналитические решения стационарных задач теплопроводности для весьма широкого диапазона изменения формы тела. Изучение процесса теплопроводности в этих различных геометрических формах позволяет установить закономерности и законы, характерные для каждого типа формы. Это важно для разработки технических устройств, материалов и систем с оптимальными свойствами теплопроводности.

Практика конструирования и моделирования сложных элементов энергетических установок, в частности теплообменников, показывает, что применение аналитических методов решения прикладных задач зачастую даёт более ценные результаты для качественного анализа поведения систем и оптимизации режимов их эксплуатации. Однако с ростом количества элементов в системе применение известных методов решения задач математической физики становится затруднительным.

Актуальность данной статьи заключается в том, что полученные результаты работы могут быть применимыми для расчётов и проектирования как нагревательных элементов, так и теплообменников эллиптического сечения, а также для повышения интенсификации процессов теплообмена между ними. Это важно для разработки технических устройств, материалов и систем с оптимальными свойствами теплопроводности.

Целью данной работы является нахождение распределения температурного поля в теле эллиптического сечения при граничных условиях второго рода. Задачами исследования было изучение методов решения краевых задач.

Научная новизна исследования заключается в том, что в работе была рассмотрена краевая задача Неймана для уравнения Пуассона в эллиптическом теле. Решение подобных задач связано с множеством математических трудностей.

В работе рассмотрена задача Неймана, которая является второй краевой задачей. Примером такого граничного условия служит электрообогрев тела поверхностным нагревателем [11, 12]. Также в электротехнике очень часто возникает вопрос о температурном поле тела с внутренним тепловыделением [13–17]. Одной из причин проблематичности решения подобных задач связано с тем, что они являются двумерными задачами теплопроводности [18–25]. Для их решения существуют аналитические методы, однако, получаемые на их основе решения могут выражаться сложными функциональными рядами, содержать специальные функции, что существенно затрудняет их практическое использование. Решение такого рода задач проводится с использованием численных методов [26–33]. В данной статье на основе методов дифференцирования и интегрирования была решена краевая задача Неймана для уравнения Пуассона в эллиптическом теле. Данная работа является продолжением исследования автора [34].

Математическая постановка задачи

Рассмотрим тело бесконечной длины. Будем считать, что тепловыделение постоянно по объёму. Сам процесс описывается математически с помощью дифференциального уравнения в частных производных

$$\Delta T + \frac{q_v}{\lambda} = 0\,, \tag{1}$$

где q_v – удельная мощность источника.

На границе поверхности задано распределение плотности теплового потока q_c, которое можно записать в виде

$$q_c = f(x, y, z, t)\,, \tag{2}$$

где сам поток можно определить по формуле

$$-\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y}\right) = q_c\,. \tag{3}$$

Поставленную задачу будем решать аналитически. Решение должно удовлетворять самому дифференциальному уравнению теплопроводности (1), а также краевому условию задачи (2). Единственность решения уравнения теплопроводности обеспечивается заданием начального и граничных условий. Начальное условие определяет температуру тела в начальный момент времени, которое в общем случае может быть произвольной функцией координат. При этом граничные условия моделируют тепловые процессы на границе исследуемого объекта.

Построение решения задачи

Для упрощения математических вычислений перейдём к эллиптической системе координат α, β, $0 \le \alpha < \infty$, $-\pi \le \beta \le \pi$. В этой системе уравнение поверхности заданного тела имеет вид

$$\alpha = \alpha_0, \tag{4}$$

где полуоси a и b эллипса определяются следующими соотношениями

$$a = c ch\alpha_0, b = c sh\alpha_0, c = \sqrt{a^2 + b^2} . \tag{5}$$

В данном случае дифференциальное уравнение теплопроводности запишется в виде

$$\frac{1}{c^2(ch^2\alpha + \cos^2\beta)}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2}\right) = -\frac{q_v}{\lambda}, \tag{6}$$

а само граничное условие (2) в новой системе запишется следующим образом

$$-\lambda \frac{1}{c\sqrt{ch^2\alpha_0 - \cos^2\beta}} \left.\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} = q_c . \tag{7}$$

Произведём замену переменой следующим образом

$$T = U(\alpha,\beta) - \frac{q_v c^2}{4\lambda}\left(sh^2\alpha + \cos^2\beta\right). \tag{8}$$

В результате такой замены получим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} = 0 . \tag{9}$$

Решение полученного уравнения (9) представляет собой ряд

$$U(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n chn\alpha \cos n\beta + B_n shn\alpha \sin n\beta\right). \tag{10}$$

Также примем во внимание, что из условия поставленной задачи следует симметричность температурного поля. Поэтому коэффициенты $B_n = 0$, откуда

$$U(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n chn\alpha \cos n\beta , \tag{11}$$

тогда выражение для температуры примет вид

$$T(\alpha,\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n chn\alpha \cos n\beta - \frac{q_v c^2}{4\lambda}\left(sh^2\alpha + \cos^2\beta\right). \tag{12}$$

Подставим формулу (8) в граничное условие (7)

$$\frac{1}{\sqrt{ch^2\alpha_0 - \cos^2\beta}}\left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{q_\upsilon}{4\lambda} c^2 sh2\alpha_0\right) = -\frac{c}{\lambda} q_c . \tag{13}$$

Далее продифференцируем и подставим выражение (11) в формулу (13)

$$\frac{1}{\sqrt{ch^2\alpha_0 - \cos^2\beta}}\left(\sum_{n=0}^{\infty} nA_n shn\alpha_0 \cos n\beta - \frac{q_\upsilon}{4\lambda} c^2 sh2\alpha_0)\right) = -\frac{c}{\lambda} q_c \tag{14}$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} nA_n shn\alpha_0 \cos n\beta - \frac{q_\upsilon}{4\lambda} c^2 sh2\alpha_0 = -\frac{c}{\lambda} q_c \sqrt{ch^2\alpha_0 - \cos^2\beta}\,. \tag{15}$$

Применим метод интегрирования по переменной β от 0 до π, получим

$$-\frac{q_v \pi}{4\lambda} c^2 sh2\alpha_0 = -\frac{c\pi}{2\lambda} q_c \int_0^\pi \sqrt{ch^2\alpha_0 - \cos^2\beta}\,d\beta, \tag{16}$$

откуда

$$\frac{q_v}{2q_c} csh2\alpha_0 = \int_0^\pi \sqrt{ch^2\alpha_0 - \cos^2\beta}\,d\beta. \tag{17}$$

Для вычисления интеграла в выражении (17) воспользуемся эллиптическим интегралом второго рода E

$$\int_0^\pi \sqrt{ch^2 a_0 - \cos^2\beta}\,d\beta = 2cha_0 E\left(\frac{1}{cha_0}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{18}$$

С учётом (18) формула (17) примет вид

$$\frac{q_v}{2q_c} csh\alpha_0 = E\left(\frac{1}{cha_0}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{19}$$

Анализ полученного решения

Формула (12) совпадает с формулой, полученной автором ранее [35, 36] для случая распределения температурного поля в теле эллиптического сечения при граничных условиях третьего рода с внутренним источником тепла. Это связано тем, что граничные условия третьего рода определяются постоянной, которая характеризует интенсивность теплосъёма с поверхности тела. При устремлении этой постоянной к нулю (ситуация, соответствующая слабому съёму тепла с поверхности) граничные условия сводятся к граничным условиям второго рода. Как следует из полученной формулы, температура тела при заданных условиях определяется его геометрическими размерами и подводимой мощностью. Само выражение содержит гипергеометрические и гиперболические функции.

Формула (19) связывает тепловые потоки внутри эллиптического тела и на его поверхности.

Выводы

1. В настоящей работе была решена краевая задача Неймана для уравнения Пуассона в эллиптическом теле.

2. Само решение было на основе применения численных методов в эллиптической системе. Достоверность полученных результатов работы подтверждается тем, что общее решение задачи совпадает с решением, полученным в одной из работ автора для случая граничных условий третьего рода.

3. Полученный результат работы автора может быть применим как для решения подобных задач, так и для расчётов и проектирования теплообменников эллиптического сечения.

Библиография

1. Багаев А.А., Бобровский С.О. Интенсификация теплообмена в цилиндрическом змеевиковом теплообменнике электронагревателя с косвенным способом теплопередачи // Вестник Алтайского государственного аграрного университета. 2021. № 5 (199). С. 127–131.

2. Шит М.Л., Пацюк В.И., Журавлев А.А., Бурчу В.И., Тимченко Д.В. Управление теплообменным аппаратом с переменной площадью поверхности теплообмена // Проблемы региональной энергетики. 2019. № 1 (39). С. 90–101.

3. Дзюбенко Б.В., Кузма-Китча Ю.А., Леонтьев А.И. Интенсификация тепло- и массообмена на макро-, микро- и наномасштабах. М.: ЦНИИАТОМИНФОРМ, 2008. 539 с.

4. Мищенко А.В. Стационарное температурное поле в многослойных стержнях с разрывами ширины сечения // Вестник МГСУ. 2019. Т. 14. № 1 (124). С. 12–21.

5. Шаповалов А.В., Кидун Н.М., Никулина Т.Н. Способы интенсификации теплообмена в теплопередающих устройствах // Вестник ГГТУ им. П.О. Сухого. 2021. № 4. С. 67–76.

6. Хурмаматов А.М., Рахимов Г.Б., Муртазаев Ф.И. Интенсификации процессов теплообмена в трубчатых теплообменниках // Universum: технические науки: электрон. научн. журнал. 2021. № 11 (92). С. 11–15.

7. Канарейкин А.И. Распределение температуры в теле эллиптического сечения без внутренних источников тепла при граничных условиях третьего рода // Наукосфера. 2022. № 7-2. С. 96–100.

8. Канарейкин А.И. Поведение температурного поля тел эллиптического сечения при различных граничных условиях: монография. М.: Саратовский источник, 2023. 67 с.

9. Kanareikin A.I. Temperature distribution in an elliptical body without internal heat sources under boundary conditions of the third kind with partial adiabatic isolation // E3S Web of Conferences. International Scientific Conference «Fundamental and Applied Scientific Research in the Development of Agriculture in the Far East» (AFE-2022). 2023. P. 03017.

10. Kanareikin A.I. Energy calculation of the temperature field of an elliptical body without internal heat sources under boundary conditions of the third kind // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 2022. N 1045. P. 012068.

11. Канарейкин А.И. Теплообмен между нагревательным элементом цилиндрической формы и его оболочкой при граничных условиях четвертого рода // Вестник Международной академии холода. 2023. № 3. С. 68–73.

12. Канарейкин А.И. Теплообмен между нагревательным элементом цилиндрической формы и его оболочкой // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2023. № 2. С. 12–16.

13. Алдашев С.А. Нелокальные краевые задачи в цилиндрической области для многомерного уравнения Лапласа // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2019. Т. 19, № 1. С. 16–23.

14. Цой П.В. Системные методы расчета краевых задач тепломассопереноса. М.: Изд-во МЭИ, 2005. 567 с.

15. Иванов М.И., Кремер И.А., Урев М.В. Решение вырожденной задачи Неймана методом конечных элементов // Сибирский журнал вычислительной математики. 2019. Т. 22, № 4. С. 437–451.

16. Расулов К.М., Нагорная Т.Р. О решении в явном виде краевой задачи Неймана для дифференциального уравнения Бауэра в круговых областях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21, № 3. С. 326–335.

17. Расулов К.М. О явном решении краевой задачи типа Неймана для обобщенных аналитических функций в единичном круге // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». 2020. Т. 12. № 1. С. 31–36.

18. Tatsiy R.M., Pazen O.Y., Vovk S.Y., Kharyshyn D.V. Simulation of heat transfer process in a multilateral cylindrical shell taking into account the internal heat sources // Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu. 2020. N 3. P. 27–32.

19. Nolasco C., Jacome N.J., Hurtado-Lugo N.A. Solution by numerical methods of the heat equation in engineering applications. A case of study: Cooling without the use of electricity // Journal of Physics: Conference Series. 2019. V. 1388. P. 012034.

20. Eremin A.V., Kudinov V.A., Stefanyuk E.V. Heat Exchange in a Cylindrical Channel with Stabilized Laminar Fluid Flow // Fluid Dynamics. 2018. V. 53. P. 29–39.

21. Садыков А.В. Расчет двумерного температурного поля в цилиндрической камере // Бюллетень науки и практики. 2018. Т. 4. № 12. С. 24–34.

22. Видин Ю.В., Казаков Р.В., Злобин В.С. Процесс переноса тепла в двухслойном цилиндрическом теле // Известия высших учебных заведений. Проблемы энергетики. 2018. Т. 20, № 11–12. С. 93–98.

23. Мамедли Р.Э. Устойчивость неоднородных трёхслойных стержней при неравномерном поле температуры в нелинейно упругой среде // Математические структуры и моделирование. 2018. № 2 (46). С. 33–38.

24. Мищенко А.В. Моделирование двумерных температурных полей в структурно-неоднородных стержнях с разрывными геометрическими параметрами // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 1 (709). С. 5–15.

25. Chen T. An Experimental Investigation of Nucleate Boiling Heat Transfer from an Enhanced Cylindrical Surface // Appl. Therm. Eng. 2013. V. 59, N 1-2. P. 355.

26. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. М.: Наука, 2001. 288 с.

27. Зельдович Б.И., Мышкис А.Д. Элементы математической физики. М.: Просвещение, 2001. 352с.

28. Карташов Э.М., Кудинов А. Аналитические методы теории теплопроводности и ее приложений. М.: Ленанд, 2018. 1072 с.

29. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. Т. 1. М.: Высшая школа, 1982. 328 с.

30. Кудинов В.А., Карташов Э.М., Калашников В.В. Аналитические решения задач тепломассопереноса и термоупругости для многослойных конструкций. М.: Высшая школа, 2005. 430 с.

31. Иванов Д.Ю. Уточнение коллокационного метода граничных элементов вблизи границы области в случае двумерных задач нестационарной теплопроводности с граничными условиями второго и третьего рода // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 57. С. 5–25.

32. Котова Е.В., Еремин А.В., Кудинов В.А. Метод дополнительных искомых функций в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды // Вестник ИГЭУ. 2019. № 2. С. 59–70.

33. Власов Н.М., Федик И.И. Тепловыделяющие элементы ядерных ракетных двигателей. М.: ЦНИИ атоминформ, 2001. 208 с.

34. Канарейкин А.И. Решение краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона в цилиндрическом стержне // Международный журнал информационных технологий и энергоэффективности. 2023. Т. 8, № 1 (27). С. 90–96.

35. Канарейкин А.И. Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренними стационарными источниками теплоты при граничных условиях третьего рода // Тепловые процессы в технике. 2021. Т. 13, № 5. С. 226–229.

36. Канарейкин А.И. Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренним источником тепла при граничных условиях третьего рода // Вестник Калужского университета. 2021. № 2 (51). С. 107–109.