УДК 517.926

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ФРАНКЛЯ – МОРАВЕЦ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ СОПЕЛ ЛАВАЛЯ

Кудаева Ф.Х., Кайгермазов А.А.*, Нагоров А.Л., Есанкулова М.Х., Исакова М.М., Бицуев Т.М.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова

***arslan1961@yandex.ru**

Рассмотрена задача Франкля – Моравец для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа, которая описывает течение внутри сопла Лаваля. Представлено доказательство существования и единственности решения задачи.

Ключевые слова: сопло Лаваля, уравнение гиперболо-параболического типа, задача Франкля-Моравец; метод abc.

AN ANALOGUE OF THE FRANKL – MORAVEC PROBLEM AND ITS APPLICATION IN LAVAL NOZZLE THEORY

Kudayeva F.Kh., Kaygermazov A.A., Nagorov A.L., Esankulova M.H., Isakova M.M., Bitsuev T.M.

Kabardino-Balkaria State University

We consider the Frankl-Moravec problem for a mixed hyperbolic-parabolic equation, which describes the flow inside the Laval nozzle. The proof of the existence and uniqueness of the solution of the problem is presented.

Keywords: Laval nozzle, hyperbolic-parabolic equation, Frankl-Moravec problem; abc method.

Введение

Благодаря новым приложениям уравнений смешанного типа теория краевых задач для них получила в последнее время новый импульс развития. При этом важную роль в приложениях занимают краевые задачи для уравнений гипербола – параболического типа [1, 2]. Уравнения смешанного гипербола-параболического типа возникают при математическом моделировании различных процессов естествознания, например, при изучении движения газа или малосжимаемой жидкости в канале, окруженной пористой средой. В канале газодинамическое давление жидкости или газа удовлетворяет волновому уравнению, а в пористой среде описывается уравнением фильтрации, которое совпадает с уравнением диффузии. Математическое моделирование напряженности электромагнитного поля в неоднородной среде, состоящей из диэлектрика и проводящей среды, приводит к системе, состоящей из волнового уравнения и уравнения диффузии. Многие задачи теплообмена в средах с различным временем релаксации и массообмена в капиллярно-пористых средах также сводятся к задачам для гипербола-параболических уравнений.

Задача Франкля [3] и ее аналоги для смешанных гипербола – параболических уравнений мало изучены. Доказать однозначную разрешимость таких задач не всегда удается.

1. Постановка задачи

Пусть Ω конечная, односвязная область плоскости $x0y$ ограниченная:

1) отрезками AA_0, BB_0, A_0B_0 прямых $x=0$, $x=1$, $y=1$, соответственно, лежащих в полуплоскости $y>0$,

2) монотонной кривой $\Gamma: y=-\mu(x)$, $0\le x\le l$, расположенной внутри характеристического треугольника ABC и имеющей единственную общую точку с характеристикой AC, и выходящей из

точки $B(1,0)$ частью C_1B характеристики BC. Ω_1 и Ω_2 – параболическая и гиперболическая части области Ω соответственно.

В области Ω рассмотрим смешанное уравнение гипербола – параболического типа

$$Lu \equiv 0 = \begin{cases} u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u, & y > 0, \\ u_{xx} + k(y)u_{yy} + d(x,y)u, & y \le 0,\ k(y) \le 0 \ \text{при}\ y \le 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $a(x,y), b(x,y), c(x,y), k(y), d(x,y)$ – заданные, достаточно гладкие функции.

Задача Франкля – Моравец (ФМ). Найти решение уравнения (1) со следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega \setminus AB) \cap C^1(\Omega)$,

2) $u(x,y)$ является решением уравнения (1), при $y \ne 0$;

3) удовлетворяет граничным условиям

$$u\big|_{AA_0} = f_1(y),\ u\big|_{BB_0} = f_2(y),\ u\big|_{\Gamma} = \psi(x). \quad (2)$$

2. Существование и единственность решения задачи ФМ

Покажем, что решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области Ω тождественно равно нулю, если

$$u\big|_{AA_0 \cup BB_0 \cup \Gamma} = 0. \quad (3)$$

Действительно. Пусть решение задачи существует. Вводя обозначения

$$u(x,0) = \tau(x), \qquad u_y(x,0) = \nu(x) \quad (4)$$

и переходя к пределу при $y \to 0$ в уравнении (1), из параболической части будем иметь

$$\tau''(x) + a(x,0)\tau'(x) + b(x,0)\nu(x) + c(x,0)\tau(x) = 0, \quad (5)$$

$$\tau(0) = \tau(1) = 0. \quad (6)$$

Считая $b(x,0) \ne 0$ для всех $x \in I = [AB]$ из (5), имеем:

$$\alpha_0(x)\tau''(x) + \alpha_1(x)\tau'(x) + \alpha_2(x)\tau(x) = \nu(x), \quad (7)$$

где $\alpha_0(x) = -\dfrac{1}{b(x,0)}$, $\alpha_1(x) = -\dfrac{a(x,0)}{b(x,0)}$, $\alpha_2(x) = -\dfrac{c(x,0)}{b(x,0)}$.

Умножив (7) на $\tau(x)$ и интегрируя на AB, имеем

$$\begin{aligned} I_1 = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = \int_0^1 \alpha_0(x)\tau(x)\tau''(x)dx + \int_0^1 \alpha_1(x)\tau(x)\tau'(x)dx + \int_0^1 \alpha_2(x)\tau^2(x)dx = \\ = i_1 + i_2 + \int_0^1 \alpha_2(x)\tau^2(x)dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая (6) и интегрируя по частям, получим

$$i_1 = \int_0^1 \alpha_0(x)\tau(x)\tau''(x)dx = -\int_0^1 \alpha_0'(x)\tau(x)\tau'(x)dx - \int_0^1 \alpha_0(x)\tau'^2(x)dx. \quad (9)$$

$$-\int_0^1 \alpha_0'(x)\tau(x)\tau'(x)dx = \int_0^1 \alpha_0''(x)\tau^2(x)dx + \int_0^1 \alpha_0'(x)\tau(x)\tau'(x)dx. \quad (10)$$

Отсюда получаем

$$\int_0^1 \alpha_0'(x)\tau(x)\tau'(x)dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \tau''(x)\tau^2(x)dx. \quad (11)$$

Из (11) и (9) имеем

$$i_1 = -\int_0^1 \alpha_0(x)\tau'^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_0''(x)\tau^2(x)dx. \quad (12)$$

$$i_2 = \int_0^1 \alpha_1(x)\tau(x)\tau'(x)dx = -\int_0^1 \alpha_1(x)\tau(x)\tau'(x)dx - \int_0^1 \alpha_1'(x)\tau^2(x)dx. \quad (13)$$

Отсюда имеем $2\int_0^1 \alpha_1(x)\tau(x)\tau'(x)dx = -\int_0^1 \alpha_1'(x)\tau^2(x)dx$.

Значит

$$i_2 = -\frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_1'(x)\tau^2(x)dx. \tag{14}$$

С учетом (14), (12) из (8) имеем

$$\begin{gathered} I_1 = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = -\int_0^1 \alpha_0(x)\tau'^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_0''(x)\tau^2(x)dx - \\ -\frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_1'(x)\tau^2(x)dx + \int_0^1 \alpha_2(x)\tau^2(x)dx. \end{gathered} \tag{15}$$

Из (15) следует, что если выполнены условия

$$a'(x)b(x) - a(x)b'(x) \le 0\,,\ b''(x)b(x) - 2b'^2(x) \le 0\,,\ b(x) \le 0\,,\ c(x) \le 0\,,$$

то $I_1 \le 0$.

Покажем теперь, что из гиперболической части области Ω_2 следует

$$I_2 = \int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx \ge 0\,.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{k(y)}uu_{xx} = \left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)_x - \frac{1}{k(y)}u_x^2, \quad uu_{yy} = (uu_y)_y - u_y^2,$$

имеем

$$0 = \iint_{\Omega_2} k(y)u\left[\frac{1}{k(y)}\left(u_{xx} + k(y)u_{yy} + \frac{d(x,y)}{k(y)}u\right)\right]dxdy =$$

$$= \int_{AC_1\cup C_1B\cup BA}\left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)dy - (uu_y)dx + \iint_{\Omega_2}\left[-\frac{1}{k(y)}u_x^2 - u_y^2 + \frac{d(x,y)}{k(y)}u^2\right]dxdy\,. \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \int_{AC_1\cup C_1B\cup BA}\left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)dy - (uu_y)dx = \int_{AC_1}\left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)dy - (uu_y)dx + \\ + \int_{C_1B}\left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)dy - (uu_y)dx + \int_{BA}\left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)dy - (uu_y)dx. \end{gathered} \tag{17}$$

Из (16) и (17) следует

$$\begin{gathered} -\int_{BA}\left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)dy - (uu_y)dx = \int_{AC_1}\left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)dy - (uu_y)dx + \\ + \int_{C_1B}\left(\frac{1}{k(y)}uu_x\right)dy - (uu_y)dx + \iint_{\Omega_2}\left[-\frac{1}{k(y)}u_x^2 - u_y^2 + \frac{d(x,y)}{k(y)}u^2\right]dxdy = \\ = T_1 + T_2 + T_3. \end{gathered} \tag{18}$$

Из условия $u|_\Gamma = 0$ имеем, что $\frac{1}{k(y)}u_x dy - u_y dx = 0$.

Отсюда

$$T_1 = \int_{AC_1}\left(\frac{1}{k}uu_x\right)dy - (uu_y)dx = 0\,. \tag{19}$$

Из (19) и (18) получим

$$-\int_{AB} uu_y dx = \int_{BA}\frac{1}{k(y)}uu_x dy + T_2 + T_3\,. \tag{20}$$

На прямой $y = 0\ \ dy = 0$. Значит

$$-\int_{AB} uu_y dx = T_2 + T_3\,. \tag{21}$$

Преобразуем теперь T_2. Интегрируя по частям и учитывая (3) получим

$$T_2 = \int_{C_1B} \left(\frac{1}{k(y)} uu_x \right) dy - (uu_y)dx =$$

$$= \int_{C_1B} -\frac{1}{\sqrt{-k(y)}} u[uxdx + uydy] = -\int_{C_1B} \frac{1}{\sqrt{-k(y)}} udu = \frac{1}{4}\int_{C_1B} \frac{k'_y}{(-k(y))^{3/2}} u^2 dy. \quad (22)$$

Из (22), (21) имеем

$$\int_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = \frac{1}{4}\int_{C_1B} \frac{k'(y)u^2}{(-k(y))^{3/2}} dy + \iint_{\Omega_2} \left[-\frac{1}{k(y)} u_x^2 - u_y^2 + \frac{d(x,y)}{k(y)} u^2 \right] dxdy. \quad (23)$$

Выясним, при каких условиях $\iint_{\Omega_2} \left[-\frac{1}{k(y)} u_x^2 - u_y^2 + \frac{d(x,y)}{k(y)} u^2 \right] dxdy \geq 0$.

Переходя в уравнении (1) к характеристическим координатам

$$\xi = x - \int_0^y \frac{1}{\sqrt{-k(t)}} dt, \qquad \eta = x + \int_0^y \frac{1}{\sqrt{-k(t)}} dt \quad (24)$$

получим

$$u_\xi u_\eta = \frac{8(-k(y))^{3/2}}{k(y)k'(y)} u_{\xi\eta} u_\eta + u_\eta^2 + \frac{2(-k(y))^{3/2}}{k(y)k'(y)} d(\xi,\eta) uu_\eta. \quad (25)$$

Далее находим

$$\iint_{\Omega_2} \left[-\frac{1}{k(y)} u_x^2 - u_y^2 + \frac{d(x,y)}{k(y)} u^2 \right] dxdy =$$

$$= 8\iint_\Delta \frac{1}{k\sqrt{-k}} u_\xi u_\eta d_\xi d_\eta - 2\iint_\Delta \frac{d}{k\sqrt{-k}} u^2 d_\xi d_\eta = \mu_1 + \mu_2 \quad (26)$$

$$\mu_1 = 8\iint_\Delta \left[\frac{1}{k\sqrt{-k}} \frac{8(-k)^{3/2}}{kk'} u_{\xi\eta} u_\eta + \frac{1}{k\sqrt{-k}} u_\eta^2 + \frac{2}{k\sqrt{-k}} \frac{(-k)^{3/2}}{kk'} duu_\eta \right] d_\xi d_\eta = \quad (27)$$

$$= 64\iint_\Delta \frac{1}{k'} u_{\xi\eta} u_\eta d_\xi d_\eta + 8\iint_\Delta \left[\frac{1}{k\sqrt{-k}} u_\eta^2 + \frac{2}{k'} duu_\eta \right] d_\xi d_\eta = S_1 + S_2.$$

где Δ – прообраз области при отображении (24).

Из (25) и (26) имеем

$$S_2 = 8\iint_\Delta \left[\frac{1}{k\sqrt{-k}} u_\eta^2 + \frac{2}{k'} duu_\eta \right] d_\xi d_\eta = \quad (28)$$

$$= 8\iint_\Delta \frac{1}{k\sqrt{-k}} \left[u_\eta + \frac{k\sqrt{-k}}{k'} du \right]^2 d_\xi d_\eta - 8\iint_\Delta \frac{k\sqrt{-k}}{k'^2} d^2 u^2 d_\xi d_\eta = j_1 + j_2.$$

Выражение, $j_1 \geq 0$. Рассмотрим выражение

$$\mu_2 + j_2 = -2\iint_\Delta \frac{d}{k\sqrt{-k}} u^2 d\xi\, d\eta - 8\iint_\Delta \frac{k\sqrt{-k}}{k'^2} d^2 u^2 d\xi\, d\eta = \quad (29)$$

$$= -2\iint_\Delta \frac{1}{k\sqrt{-k}} du^2 \left[1 + \frac{4k^4}{k'^2} d \right] d\xi\, d\eta.$$

Пусть выполнены условия

$$1)\ d(\xi,\eta) \leq 0; \quad 2)\ 1 + 4\frac{k^4}{k'^2} d(\xi,\eta) \geq 0. \quad (30)$$

Тогда $\mu_2 + j_2 \geq 0$.

Покажем теперь, что

$$S_1 = 64\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{k'} u_{\xi\eta} u_\eta d_\xi d_\eta \geq 0 .$$

$$S_1 = 64\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{k'} u_{\xi\eta} u_\eta d_\xi d_\eta = 32\iint\limits_{\Delta} \frac{1}{k'} (u_\eta^2)_\xi d_\xi d_\eta = \int\limits_0^1 d_\eta \int\limits_{\gamma(\eta)}^{\eta} \frac{1}{k'} (u_\eta^2)_\xi d_\xi =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{k'} u_\eta^2 \Big|_{\gamma(\eta)}^{\eta} - \int\limits_{\gamma(\eta)}^{\eta} \left(\frac{1}{k'} \right)' u_\eta^2 d_\xi \right] d_\eta =$$

$$= \{ \int\limits_0^1 \frac{1}{k'} u_\eta^2 \Big|_{\gamma=\gamma(u)}^{\xi=\eta} d_\eta + \iint\limits_{\Delta} \frac{k''}{(k')^2} u_\eta^2 d_\xi d_\eta \} \geq 0$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \tau(x)\nu(x)dx \geq 0 , \tag{31}$$

если выполняется условие (30).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия

1) $a(x,y) \in C^1(\Omega_1)$; $b(x,y) \in C^2(\Omega_1)$, $c(x,y) \in C(\Omega_1)$,

2) $a'_x b - a b'_x \leq 0$, $b''_x b - 2(b'_x)^2 \leq 0$, $b(x,y) < 0$, $c(x,y) \leq 0$ при $(x,y) \in \Omega_1$,

3) $d(x,y) < 0$, $(x,y) \in \Omega_2$,

4) $1 + \dfrac{4(k(y))^4}{(k'(y))^2} d(x,y) > 0$, $((x,y) \in \Omega_2$.

Тогда, задача ФМ имеет единственное решение.

Действительно, при выполнении условий 1), 2) теоремы из параболической части следует, что $\int\limits_0^1 \tau(x)\nu(x)dx \leq 0$. В силу неравенства (31) из гиперболической части Ω_2 области Ω имеем $\int\limits_0^1 \tau(x)\nu(x)dx \geq 0$. Следовательно, $\int\limits_0^1 \tau(x)\nu(x)dx = 0$.

Отсюда следует единственность задачи ФМ.

Докажем теперь существование решения задачи ФМ. Пусть $d(x,y) = 0$, $k(y) = (-y)^m$, $0 < m < 1$ и кривая Γ вначале совпадает с куском характеристики AC, а потом отходит от нее.

Уравнение (1) примет вид

$$0 = \begin{cases} u_{xx} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u, \ y > 0 \\ u_{xx} - (-y)^m u_{yy}, \ y < 0, \ 0 < m < 1. \end{cases} \tag{32}$$

При $y < 0$ в характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}$$

уравнение (32) примет вид

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi}(u_\eta - u_\xi) = 0, \quad \beta = \frac{m}{2(m-2)} . \tag{33}$$

Область Ω_2 при этом перейдет в область Δ $(\xi = 0, \ 0 \leq \eta \leq \overline{x_1} < 1, \ \xi = \overline{\gamma}(\eta), \ \overline{x_1} \leq \eta \leq 1, \ \eta = 1)$, причем предполагается, что $\overline{\gamma}(x_1) = 0$, $\xi(1) < x_1$.

Регулярное в области Ω_2 решение уравнения (32) удовлетворяющее условиям

$$u(x,0)=\tau(x),$$

$$\lim_{y\to 0} u_y(x,y)=\left[2(1-2\beta)\right]^{-2\beta}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2/3}(u_\eta u_\xi)=\nu(x)$$

имеет вид [4]

$$\begin{aligned} u(x,y)=\Theta_1\int_0^1\tau\left(x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(1-2\xi)\right)\xi^\beta(1-\xi)^\beta d\xi+ \\ +\frac{\Theta_1}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1\tau'\left(x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(1-2\xi)\right)(1-\xi)^\beta(1-2\xi)^\beta d\xi+ \\ +\Theta_3 y\int_0^1\nu\left(x+\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(1-2\xi)\right)\xi^{-\beta}(1-\xi)^{-\beta}d\xi, \end{aligned} \tag{34}$$

где $\Theta_1=\dfrac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)}$, $\Theta_2=\left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta-1}\dfrac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$, $\Theta_3=\dfrac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}$.

Характеристика, проходящая через точку $(x_1,0)$, имеет вид

$$x_1-x=\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}\ .$$

Подставив (35) в (34) и обозначив ξ через t, получим

$$\begin{aligned} u(x,x_1)=\Theta_1\int_0^1\tau\left[x+(x_1-x)(1-2t)\right]t^\beta(1-t)^\beta dt+ \\ +\frac{\Theta_1}{2}(x_1-x)\int_0^1\tau'\left[x+(x_1-x)(1-2t)\right](1-t)^\beta(1-2\beta)^\beta dt- \\ -\Theta_3\left[\frac{2-m}{2}(x_1-x)^{\frac{2}{2-\beta}}\right]\int_0^1\nu\left[x+(x_1-x)(1-2t\right]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt. \end{aligned}$$

Делая замену $z=x+(x_1-x)(1-2t)$ из последнего, находим

$$\begin{aligned} u(x,x_1)=-\Theta_4(x_1-x)^{-1-2\beta}\int_{x_1}^{2x-x_1}\tau(z)(z-x_1)^\beta(z-2x+x_1)^\beta dz- \\ -\Theta_5(x_1-x)^{-2\beta}\int_{x_1}^{2x-x_1}\tau'(z)(z-x_1)^\beta(z-2x+x_1)^\beta dz+ \\ +\Theta_3\int_{x_1}^{2x-x_1}\nu(z)(x-z)^{-\beta}(z-2x+x_1)^{-\beta}dz, \end{aligned} \tag{36}$$

где $\Theta_4=\Theta_1 2^{-1-2\beta}$, $\Theta_5=\Theta_1 2^{-1-\beta}$.

Переходя в (36) к характеристическим координатам (ξ,η) и полагая $\eta=x_1$, обозначив z через t, получим

$$\begin{aligned} \psi(\xi)=-\Theta_4(x_1-\xi)^{-1-2\beta}\int_{x_1}^{\xi}\tau(t)(t-x_1)^\beta(t-\xi)^\beta dt- \\ -\Theta_5(x_1-\xi)^{-2\beta}\int_{x_1}^{\xi}\tau'(t)(t-x_1)^\beta(t-\xi)^\beta dt+ \\ +\Theta_6\int_{x_1}^{\xi}\nu(t)(t-\xi)^{-2\beta}dt, \end{aligned} \tag{37}$$

где $\Theta_6=\Theta_3(-1)^{-\beta}$.

Приравнивая выражение (34) к $\overline{\varphi_1}(x)$ на Γ_1 получим

$$\Theta_1\int_0^1\tau[2x(1-t)][t(1-t)]^\beta dt+\frac{\Theta_1}{2}x\int_0^1\tau'[2x(1-t)](1-t)^\beta(1-2t)^\beta dt-$$
$$-\Theta_3\left(\frac{2-m}{2}x\right)^{\frac{2}{2-m}}\int_0^1\nu[2x(1-t)]t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}dt=\overline{\varphi_1}(x).$$

Сделав в последнем выражении замену $2x(1-t)=z$, получим

$$\Theta_7\int_{2x}^0\nu(z)(2x-z)^{-\beta}z^{-\beta}dz=\Theta_4x^{-1-2\beta}\int_{2x}^0\tau(z)z^\beta(2x-z)^\beta dz-$$
$$-\Theta_5x^{-1-2\beta}\int_{2x}^0\tau'(z)z^\beta(z-x)^\beta dz+\overline{\varphi_1}(x), \tag{38}$$

где $\Theta_7=\Theta_3\left(\frac{2-m}{2}\right)^{\frac{2}{2-m}}2^{2\beta-1}$.

Или, деля на Θ_7 и обозначая $2x$ через x, z через t имеем

$$\int_0^x\frac{\nu(t)dt}{(x-t)^\beta t^\beta}=\Theta_8x^{-2\beta}\int_0^x\tau'(t)t^\beta(2t-x)^\beta dt-$$
$$-\Theta_9x^{-1-2\beta}\int_0^x\tau(t)t^\beta(x-t)^\beta dt+\Theta_{10}\overline{\varphi_1}\left(\frac{x}{2}\right), \tag{39}$$

где $\Theta_8=\frac{\Theta_5}{\Theta_7}2^{3\beta}$, $\Theta_9=\frac{\Theta_4}{\Theta_7}2^{-1-2\beta}$, $\Theta_{10}=\frac{1}{\Theta_7}$.

Дифференцируя (39) по x, находим

$$-\beta\int_0^x\frac{\nu(t)dt}{t^\beta(x-t)^{1+\beta}}=\Theta_{11}x^{-2\beta-1}\int_0^x\tau'(t)t^\beta(2t-x)^\beta dt-$$
$$-\frac{\Theta_{11}}{2}x^{-2\beta}\int_0^x\tau'(t)t^\beta(2t-x)^{\beta-1}dt+$$
$$+\Theta_{12}x^{-2(1+\beta)}\int_0^x\tau(t)t^\beta(x-t)^\beta dt-\Theta_{13}x^{-1-2\beta}\int_0^x\tau(t)t^\beta(x-t)^{\beta-1}dt+\overline{\mu}(x), \tag{40}$$

где $\Theta_{11}=-2\beta\Theta_8$, $\Theta_{12}=(-1-2\beta)\Theta_9$, $\Theta_{13}=\beta x^{-1-2\beta}\Theta_9$, $\overline{\mu}(x)=\Theta_8\tau'(x)+\Theta_{10}\overline{\varphi_1}'\frac{x}{2}$,

Обращая (40) как интегральное уравнение Абеля, будем иметь

$$-\beta x^\beta\nu(x)=\frac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi}\Theta_{11}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\xi^{-1-2\beta}d\xi}{(x-\xi)^{-\beta}}\int_0^\xi\frac{t^\beta\tau'(t)}{(2t-\xi)^{-\beta}}dt-$$
$$-\frac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi}\frac{\Theta_{11}}{2}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\xi^{-2\beta}d\xi}{(x-\xi)^{-\beta}}\int_0^\xi\frac{t^\beta\tau'(t)dt}{(2t-\xi)^{1-\beta}}+$$
$$+\frac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi}\Theta_{12}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\xi^{-2(1+\beta)}d\xi}{(x-\xi)}\int_0^\xi\frac{t^\beta\tau(t)dt}{(t-\xi)^{-\beta}}-$$
$$-\frac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi}\Theta_{13}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\xi^{-1-2\beta)}d\xi}{(x-\xi)^{-\beta}}\int_0^\xi\frac{t^\beta\tau(t)dt}{(t-\xi)^{1-\beta}}+$$
$$+\frac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi}\Theta_8\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\overline{\mu}(\xi)}{(x-\xi)^{-\beta}}d\xi=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5. \tag{41}$$

Делая замену $\xi = \dfrac{2t-\zeta}{x-\zeta}$, в первых двух интегралах и $\xi = \dfrac{t-\zeta}{x-t}$ в третьем и четвертом, а также учитывая свойства $F(a,b,b,z) = (1-z)^{-a}$, $F(a,b,a,z) = F(b,a,a,z)$ гипергеометрической функции [5], получим

$$I_1 = L_1 x^{-\beta} \frac{d}{dx}\int_0^x \tau'(t)(x-2t)^{1+2\beta} t^{-1-\beta} F(1+2\beta, 1+\beta, 1+\beta, \frac{x}{2t})dt\,,$$

где $L_1 = \dfrac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi}\dfrac{\Theta_{11}}{(-\beta)}\dfrac{1}{2^{1+2\beta}}$.

$$I_2 = L_2 x^{-\beta}\int_0^x t^{-\beta}(x-2t)^{2\beta-1}\tau'(t) F\left(2\beta, \beta, \beta, \frac{x}{2t}\right)dt\,,$$

где $L_2 = -\dfrac{1}{2^{2\beta}}\dfrac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi\beta}\dfrac{\Theta_{11}}{2}$.

$$I_3 = L_3 x^{-\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x t^{-2-\beta}(t-x)^{1+2\beta} F\left(2+2\beta, 1+\beta, 2+2\beta, \frac{t-x}{t}\right)\tau(t)dt\,,$$

где $L_3 = \dfrac{\Gamma^2(1+\beta)}{\Gamma(2+2\beta)}\dfrac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi\beta}\Theta_{12}$.

$$I_4 = L_4 x^{-\beta}\frac{d}{dx}\int_0^x t^{-1-\beta}(t-x)^{1+2\beta} F\left(1+2\beta, 1+\beta, 2+2\beta, \frac{t-x}{t}\right)\tau(t)dt\,,$$

где $L_4 = \dfrac{\Gamma^2(1+\beta)}{\Gamma(2+2\beta)}\dfrac{\sin\pi(1+\beta)}{\pi\beta}\Theta_{13}$.

Подставив (40) в (37) с учетом выражений для $I_1 - I_4$ получим

$$\begin{aligned}\psi(\xi) = \Theta_4(x_1-\xi)^{-1-2\beta}\int_\xi^{x_1} k_1(t,\xi)\tau(t)d\tau + \Theta_5(x_1-\xi)^{-2\beta}\int_\xi^{x_1} k_1(t,\xi)\tau'(t)d\tau + \\ + r_0\int_\xi^{x_1} k_2(t,\xi)\tau'(t)dt - (A+B+C),\end{aligned} \tag{42}$$

где $k_1(t,\xi) = (t-x_1)^\beta(t-\xi)^\beta$, $k_2(t,\xi) = (t-\xi)^{-2\beta}$, $r_0 = (-2)^{1+2\beta}$,

$$A = L_2\Theta_6\int_{x_1}^{t}(t-\xi)^{-2\beta}t^{-\beta}\frac{d}{dt}\int_0^t \xi^{-2-\beta}(\xi-t)^{1+2\beta} F\left(2+2\beta, 1+\beta, 2+2\beta, \frac{\xi-t}{\xi}\right)\tau(\xi)d\xi dt,$$

$$B = L_3\Theta_6\int_{x_1}^{\xi}(t-\xi)^{-2\beta}t^{-\beta}\frac{d}{dt}\int_0^t \xi^{-1-\beta}(\xi-t)^{1+2\beta} F\left(1+2\beta, 1+\beta, 2+2\beta, \frac{\xi-t}{\xi}\right)\tau(\xi)d\xi dt\,,$$

$$C = L_4\Theta_6\int_{x_1}^{\xi}(t-\xi)^{-2\beta}t^{-\beta}\frac{d}{dt}\int_0^t \mu(\zeta)(t-\zeta)^\beta d\xi dt\,.$$

Используя, что $F(a,b,c;z) = F(b,a,c;z)$ имеем

$$F\left(2+2\beta, 1+\beta, 2+2\beta, \frac{\xi-t}{\xi}\right) = \left(\frac{t}{\xi}\right)^{-1-\beta},$$

$$\int_0^t \xi^{-2-\beta}(\xi-t)^{1+2\beta} F\left(2+2\beta, 1+\beta, 2+2\beta, \frac{\xi-t}{\xi}\right)\tau(\xi)d\xi = \int_0^t \xi^{-1}(\xi-t)^{1+2\beta}t^{-1-\beta}\tau(\xi)d\xi,$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^t \xi^{-1}(\xi-t)^{-1-\beta}\tau(\xi)\xi\int_0^t\left[(-1-2\beta)(\xi-t)^{2\beta}t^{-1-\beta} - (1+\beta)t^{-2-\beta}(\xi-t)^{1+2\beta}\right]\xi^{-1}\tau(\xi)d\xi,$$

Учитывая последние вычисления в (42), получим

$$\psi(\xi)=\Theta_4(x_1-\xi)^{-1-2\beta}\int_\xi^{x_1}k_1(t,\xi)\tau(t)dt+\int_\xi^{x_1}\Lambda_1(t,\xi)\tau'(t)dt+A+B+C+D, \tag{43}$$

где

$$\Lambda_1=\Theta_5(x_1-\xi)k(t,\xi)-L_0\Theta_6k_2(t,\xi)-L_1\Theta_6k_3(t,\xi),$$

$$D=L_4\Theta_6\int_\xi^{x_1}(t-\xi)^{-2\beta}t^{-\beta}\frac{d}{dt}\int_0^t\mu(\xi)(t-\xi)^\beta d\xi dt.$$

Так как $\left(1-\dfrac{\xi-t}{\xi}\right)^{-a}\neq 0$, то $F(1+2\beta,1+\beta,2+2\beta;\dfrac{\xi-t}{\xi})=0$. Используя это из (43) имеем

$$\begin{gathered}\psi(\xi)=\Theta_4(x_1-\xi)^{-1-2\beta}\int_\xi^{x_1}k_1(t,\xi)\tau(t)dt+\int_\xi^{x_1}\Lambda_1(t,\xi)\tau'(t)dt+\\+\int_0^\xi\Lambda_2(x_1,t,\xi)\tau(t)dt-\int_0^\xi\Lambda_3(x_1,t,\xi)\mu(t)dt,\end{gathered} \tag{44}$$

где

$$\Lambda_2(x_1,t,\xi)=(1+2\beta)L_2\Theta_6\int_\xi^{x_1}t^{-3-2\beta}dt-(1+\beta)L_2\Theta_6\int_\xi^{x_1}(t-\xi)t^{-3-2\beta}dt.$$

$$\Lambda_3(x_1,t,\xi)=\beta L_4\Theta_6\int_\xi^{x_1}(t-\xi)^{-1-\beta}t^{-\beta}dt.$$

Найдем теперь связь между $\tau(x),\nu(x),\varphi_2(\eta)$. Она имеет вид

$$\begin{gathered}\varphi_2(\eta)=R(\bar\xi,\eta;\bar\xi,x_1)\psi(\bar\xi)+R(\bar\xi,\eta;0;\eta)\chi(\eta)-R(\bar\xi,\eta;0;x_1)\psi(0)-\\-\int_0^{\bar\xi}\left[\frac{\partial R(\bar\xi,\eta;\xi',x_1)}{\partial\xi'}+\beta\frac{R(\bar\xi,\eta;\xi',x_1)}{x_1-\xi'}\right]\psi(\xi')d\xi'-\\-\int_{x_1}^{\eta}\left[\frac{\partial R(\bar\xi,\eta;0,\eta')}{\partial\eta'}-\beta\frac{R(\bar\xi,\eta;0,\eta')}{\eta'}\right]\chi(\eta')d\eta',\end{gathered} \tag{45}$$

где

$$R(\xi,\eta;\xi',\eta')=\frac{(\eta'-\xi')^{2\beta}}{(\eta'-\xi)^\beta(\eta-\xi')^\beta}F(\beta,\beta;1,\delta)\ \text{– функция Римана}$$

$$\delta=\frac{(\xi'-\xi)(\eta'-\eta)}{(\eta-\xi')(\eta'-\xi)}.$$

Уравнение (45) представляет собой интегральное уравнение Вольтера относительно $\chi(\eta)$. Его можно переписать в виде

$$\chi(\eta)+\int_{x_1}^{\eta}\Gamma(\eta,\eta')\chi(\eta')d\eta'=F(\eta), \tag{46}$$

$$\begin{gathered}\text{где } F(\eta)=\left(\frac{\eta-\bar\xi}{\eta}\right)^\beta\varphi_2(\eta)-\left(\frac{\eta-\bar\xi}{\eta}\right)^\beta\left(\frac{x_1-\bar\xi}{\eta-\xi}\right)^\beta\psi(\bar\xi)+\\+\left(\frac{\eta-\bar\xi}{\eta}\right)^\beta\frac{x_1^{2\beta}}{(\eta-\bar\xi)^\beta\eta^\beta}F\left(\beta,\beta,1;\frac{\bar\xi}{\eta}\frac{\eta-x_1}{x_1-\bar\xi}\right)\psi(0)+\\+\left(\frac{\eta-\bar\xi}{\eta}\right)^\beta\int_0^{\bar\xi}\left[\frac{\partial R(\bar\xi,\eta;\xi',x_1)}{\partial\xi'}+\beta\frac{R(\bar\xi,\eta;\xi',x_1)}{x_1-\xi'}\right]\psi(\xi')d\xi'.\end{gathered} \tag{47}$$

Получим связь между $\tau(x),\tau'(x),\nu(x)$ и $\chi(\eta)$. Решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) имеет вид

$$u(x,y)=\Theta_1\int_0^1\tau\left[x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(1-2t)\right][t(1-t)]^{\beta}dt+$$
$$+\Theta_2(-y)^{\frac{2-m}{2}}\int_0^1\tau'\left[x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(1-2t)\right][t(1-t)]^{\beta}(1-2t)dt+ \quad (48)$$
$$+\Theta_3 y\int_0^1\nu\left[x-\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}(1-2t)\right][t(1-t)]^{-\beta}dt.$$

Считая $t=\frac{2}{2-m}(-y)^{\frac{2-m}{2}}$ из (48) получим

$$\int_0^x\frac{t^{\beta}\tau(t)}{(x-t)^{-\beta}}dt=\frac{1}{\Theta_1}x^{2\beta}\overline{\varphi}-\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^x\frac{t^{-\beta}\tau'(t)}{(x-t)^{-\beta}}dt+x^{-1}\int_0^x\frac{t^{1+\beta}\tau'(t)dt}{(x-t)^{-\beta}}-$$
$$-\frac{\Theta_3}{\Theta_1}\left(\frac{2-m}{2}\right)^{\frac{3}{2-m}}x^{-1+2\beta}\int_0^x\frac{t^{-\beta}\nu(t)}{(x-t)^{\beta}}dt. \quad (49)$$

Обращая (49) как интегральное уравнение Абеля будем иметь

$$x^{\beta}\tau(x)=\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi\Theta_1}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{t^{2\beta}\overline{\varphi_1}\left(\frac{t}{2}\right)dt}{(x-t)^{1+\beta}}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{dt}{(x-t)^{1+\beta}}\int_0^t\frac{\xi^{-\beta}\tau'(\xi)}{(t-\xi)^{-\beta}}d\xi+ \quad (50)$$
$$+\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{t^{-1}dt}{(x-t)^{1+\beta}}-\int_0^t\frac{\xi^{1+\beta}\tau'(\xi)}{(t-\xi)^{-\beta}}d\xi-$$
$$-\frac{\Theta_3}{\Theta_1}\frac{2-m}{\Theta_1}\left(\frac{2-m}{2}\right)^{\frac{2}{2-m}}\sin\frac{\pi(-\beta)}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{t^{-1+2\beta}dt}{(x-t)^{1+\beta}}\int_0^t\frac{\xi^{-\beta}\nu(\xi)}{(t-\xi)^{\beta}}d\xi.$$

Делая замену $S=\frac{t-\xi}{x-\xi}$ в (50) и считая $\overline{\varphi_1}\left(\frac{x}{2}\right)=\varphi_1\left(\frac{x}{2}\right)$ при $0<x<x_1$, и $\overline{\varphi_1}\left(\frac{x}{2}\right)=\chi\left(\frac{x}{2}\right)$ при $x_1<x<1$, то для $\tau(x)$ получаем соотношение

$$\tau(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{\bar{\xi}(x)}N_1(x,t)\tau(t)dt+\frac{d}{dx}\int_0^{\bar{\xi}(x)}N_2(x,t)\tau'(t)dt+P_0\int_0^x\frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{1+\beta}}+P_1(x)\tau'(x)+P(x), \quad (51)$$

где

$$N_1(x,t)=\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi\Theta_1}x^{-\beta}\int_{x_1}^{\bar{\eta}(t)}\eta^{2\beta}(x-\eta)^{-1-\beta}\frac{(x_1-\bar{\xi})^{-1-\beta}}{\eta^{\beta}}\Theta_4k_1(t,\bar{\xi}(\eta))dt,$$

$$N_2(x,t)=\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi\Theta_1}x^{-\beta}\int_0^{\bar{\eta}(t)}\eta^{2\beta}(x-\eta)^{-1-\beta}\frac{(x_1-\bar{\xi})^{-1-\beta}}{\eta^{\beta}}\Theta_4\Lambda_1(t,\bar{\xi}(\eta))dt,$$

$$P_0=(1+\beta)\frac{\Theta_3}{\Theta_1}\frac{2-m}{\Theta_1}\left(\frac{2-m}{2}\right)^{\frac{2}{2-m}}\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi},$$

$$P_1(x)=\frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(1)}\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi}-\frac{1}{2}\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi}B(\beta,1-\beta)x^{-2\beta},$$

$$P(x)=\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi\Theta_1}x^{-\beta}\frac{d}{dx}\left\{\int_0^x\frac{t^{2\beta}\varphi_1(\frac{t}{2})}{(x-t)^{1+\beta}}+\int_{x_1}^x\frac{t^{2\beta}\mu(t)dt)}{(x-t)^{1+\beta}}\right\},$$

$\Gamma(a),\ B(a,b)$ – Гамма и Бета функции Эйлера.

Соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ принесенное из параболической части Ω_1, области Ω, имеет вид

$$\tau(x)=\int_0^1 G(x,t)\nu(t)dt, \tag{52}$$

где $G(x,t)$ – функция Грина краевой задачи (5), (6).

Из (52) находим

$$\tau'(x)=\int_0^1 G_x'(x,t)\nu(t)dt \;. \tag{53}$$

Подставляя (52), (53) в (51) получим

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\nu(t)dt}{(x-t)^{1+\beta}} &= -\frac{1}{P_0}x^{1+4\beta}\int_0^1 G(x,t)\nu(t)dt-\frac{x^{1+4\beta}}{P_0}\frac{d}{dx}\int_0^{\bar{\xi}(x)} N_1(x,t)dt\int_0^1 G(t,s)\nu(s)ds-\\ &-\frac{x^{1+4\beta}}{P_0}\frac{d}{dx}\int_0^{\bar{\xi}(x)} N_2(x,t)dt\int_0^1 G_t'(t,s)\nu(s)ds-\frac{P_1(x)}{P_0}x^{1+4\beta}\int_0^1 G_t'(x,t)\nu(t)dt-\\ &-\frac{x^{1+4\beta}}{P_0}P(x).\end{aligned} \tag{54}$$

Делая перестановку Дирихле в интегралах (54), получим

$$\nu(x)+\int_0^1 \frac{x^{1+4\beta}K(x,t)}{(x-t)^{1+\beta}}\nu(t)dt=g(x), \tag{55}$$

где

$$\begin{aligned}K(x,t)=\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi}\frac{1}{P_0}\Bigg[&G(x,t)-P_1(x)G_x'(x,t)-\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{ds}{(x-t)^{1+\beta}}\int_0^{\bar{\xi}(t)} N_1(t,\xi)G(\xi,s)d\xi-\\ &-\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{ds}{(x-t)^{1+\beta}}\int_0^{\bar{\xi}(t)} N_2(t,\xi)G(\xi,s)d\xi\Bigg],\end{aligned}$$

$$g(x)=\frac{\sin\pi(-\beta)}{\pi P_0}\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{t^{1+4\beta}}{(x-t)^{1+\beta}}P(t)dt\,.$$

В силу единственности решения задачи ФМ следует безусловная разрешимость уравнения (55).

Таким образом, в данной работе рассмотрен аналог задачи Франкля – Моравец, под углом обобщения задачи Трикоми и применения к решению прямой задачи теории сопла Лаваля [3], для уравнения гипербола – параболического типа. Методом abc доказана единственность решения поставленной задачи. Существование решения эквивалентно редуцировано к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, безусловная разрешимость которой следует из единственности решения.

Библиография

1. Елеев В.А., Кетова Ж.Н. Задача Трикоми для одного смешанного уравнения гипербола – параболического типа с вырождением второго порядка // Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа. Нальчик, 1982. С. 109–118.

2. Елеев В.А. Обобщенная задача Трикоми для модельного уравнения гипербола – параболического типа // Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики. Нальчик, 1979. С. 128–131.

3. Франкль Ф.И. Обобщение задачи Трикоми и применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля // Ученые записки КБГУ. 1959. Т. 3. С. 79–93.

4. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970, 295 с.

5. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. 358 с.