

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕННЫЕ ЗАВИСИМОСТИ НАПРЯЖЕНИЕ-ДЕФОРМАЦИЯ ДЛЯ НАПОЛНЕННЫХ ЭЛАСТОМЕРОВ

Попок В.Н.*

МИРЭА – Российский технологический университет

*vnpopok@mail.ru

Рассмотрена двухэтапная линеаризация экспериментальных зависимостей напряжение-деформация, полученных в условиях одноосного растяжения образцов наполненных эластомеров. Для ряда наполненных эластомеров получены линейные регрессионные уравнения и их обобщенный вид во всей области деформации образцов, не содержащие параметров структуры и характеристики условий нагружения.

Ключевые слова: напряжение, деформация, уравнение Ривлина, корреляция, регрессионное уравнение, линеаризация.

LINEARIZATION AND GENERALIZED STRESS-STRAIN RELATIONSHIPS FOR FILLED ELASTOMERS

Popok V.N.

MIREA – Russian Technological University

A two-stage linearization of experimental stress-strain dependences obtained under conditions of uniaxial tension of samples filled elastomers is considered. For a number of filled elastomers, regression equations that are linear in the entire region of sample deformation and their generalized form are obtained, which do not contain structural parameters and characteristics of loading conditions.

Keywords: stress, strain, Rivlin equation, correlation, regression equation, linearization.

Введение

Наполненные твердыми частицами эластомеры широко используются в различных технических приложениях, а также в научных исследованиях. Поведение таких композиционных материалов (КМ) при внешних механических нагрузках определяется их составом, структурой, процессами кинетической природы в условиях деформации, условиями и характеристиками внешних воздействий. Экспериментальное исследование высокоэластических свойств КМ включает испытания образцов с использованием стандартных методов, позволяющих изменять в широком диапазоне условия и режимы нагружения образцов. Наиболее широко используемым методом испытаний различных материалов, в том числе КМ, является метод одноосного растяжения образцов [1]. Высокая приборная точность измерения параметров нагружения образцов – деформации и нагрузки, позволяет в условиях конкретного измерения говорить о получении близкой к функциональной зависимости между напряжением и деформацией. В процессе испытаний определяется форма кривой растяжения, ее особые точки – экстремумы и характеристики двух предельных точек – начального модуля упругости и точки, соответствующей разрушению образца – предельной деформации и соответствующего ей значения напряжения разрушения [1].

Перечень факторов структуры включает содержание полимера в эластомерной матрице, степень и функциональность сшивки, дисперсность и содержание разных типов и фракций наполнителя, значения максимального и критического наполнения – общие и отдельными фракциями наполнителя, характеристики адгезионного взаимодействия на границе наполнитель-полимерная основа КМ и другие факторы [2]. Большое количество перечисленных структурных факторов влияния (влияние технологии изготовления КМ, образцов для испытаний, условий испытаний) ограничивает возможности разработки и использования теоретических моделей поведения материалов в условиях внешних механических нагрузок [1, 2]. При этом следует отметить, что изменение отдельных факторов или их совокупности приводит к

ограниченному набору характерных типов зависимостей напряжение-деформация при испытаниях образцов КМ в условиях одноосного растяжения [2].

С другой стороны, экспериментально и теоретически показано существование большого количества зависимостей между свойствами (характеристиками) твердых материалов, в том числе полимеров и КМ, не содержащих параметры их структуры – надструктурных зависимостей [3, 4].

Построение обобщенных зависимостей, не содержащих параметры структуры материалов и характеристики условий их испытаний, выдвигает задачу определения общих свойств и параметров наблюдаемых зависимостей напряжение-деформация как самостоятельных объектов исследования.

Аналитическая часть

Обобщенную зависимость для разных видов кривых напряжение-деформация, заданных функциональными зависимостями $y^i=f_i(x)$, или таблично в виде набора пар значений $(x_j, y_j)^i$ независимой (x -деформация) и зависимой (y -напряжение) переменных можно построить отображением на координатной плоскости (x, y) этой функции на заданную прямую вида $y=a+b \times x$. В обозначениях использованы номинальные признаки: i – номер кривой и j – номер точки таблично заданной функции. Однако такое преобразование не дает новой информации о каких-то общих для всех кривых параметрах перехода от одной характерной кривой к другой, как и использование функциональных шкал или обобщенных переменных, когда значения на оси абсцисс соответствуют значениям функции $f_i(x)$ [5].

Перспективным выглядит «двухэтапная» линеаризация наблюдаемых в экспериментах разных немонотонных и кусочно-нелинейных зависимостей напряжение-деформация (рис. 1 (а)) с использованием методов корреляционного и регрессионного анализов. На первом этапе, используя известные приближенные решения или выбирая на основе полиномиальной (или другого типа) аппроксимации новых видов функций, модифицируют экспериментальную зависимость с выделением в правой части функциональной зависимости двухпараметрической линейной составляющей. На втором этапе линеаризации проводится кусочно-непрерывная аппроксимация модифицированных данных линейной функцией. Выбор интервалов аппроксимации должен отвечать требованию получения высоких значений коэффициента корреляции. Определение коэффициентов линейного уравнения регрессии проводится с использованием метода наименьших квадратов. Затем определяются области линейных зависимостей между коэффициентами уравнения регрессии.

Существование линейной взаимосвязи между коэффициентами уравнения регрессии следует из линейности уравнений метода наименьших квадратов и из линейной взаимосвязи коэффициентов регрессии с коэффициентом корреляции [5]. Такой двухэтапный подход позволяет получать во многих случаях одну или реже две области линейности соотношений между коэффициентами уравнения регрессии во всей области определения исходной функции.

Обобщенная линейная зависимость между коэффициентами регрессии для разных видов кривых напряжение-деформация или на отдельных участках этих кривых получается простыми операциями поворота и сдвига отрезков прямых линий. Пример линеаризации сложных функциональных зависимостей, реализованной на функциональной сетке, рассмотрен в работе [5] при кусочно-непрерывной аппроксимации функции $y=\sin(x)$ линейной функцией $y=a+b \times x$.

Применительно к рассматриваемым в работе зависимостям напряжение-деформация для разных КМ в качестве линеаризующей функции рассматривается уравнение Ривлина [6], связывающее условное напряжение (f – текущее усилие при растяжении, деленное на начальную площадь поперечного сечения образца) с удлинением образца (L) и высокоэластическим потенциалом (W):

$$\frac{f}{L - \frac{1}{L^2}} = 2 \times \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{L} \times \frac{\partial W}{\partial I_2} \right), \quad (1)$$

где I_1, I_2 – инварианты тензора деформаций, $L=1+\varepsilon/100$, ε – относительная деформация образца, %. Левая часть уравнения (1) в литературе [6] называется напряжением Муни и далее по тексту обозначается как $f_m=f_m(L)$.

Для приведения к широко используемым в литературе обозначениям положим $C_1=2\partial W/\partial I_1$ и $C_2=2\partial W/\partial I_2$. В общем случае $C_1=C_1(L)$ и $C_2=C_2(L)$ являются функциями L и при отсутствии дополнительных предположений могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Замечательным свойством такого описания зависимостей напряжение-деформация в условиях одноосного нагружения является выполнение предельного соотношения при $L \rightarrow 1$, позволяющего приводить уравнение (1) к безразмерному виду и придавать определенный физический смысл взаимосвязи C_1 и C_2 :

$$\lim \left(\frac{f}{L - \frac{1}{L^2}} \right)_{L \rightarrow 1} = C_1(1) + C_2(1) = \frac{E}{3}, \quad (2)$$

где E – начальный модуль упругости материала, который может быть определен другими методами без разрушения образца [1, 4].

Ниже приводятся конкретные примеры применения двухэтапной линеаризации для построения обобщенных регрессионных линейных зависимостей применительно к группам экспериментальных кривых напряжение-деформация, показывающие его эффективность. В качестве исходных данных использовались широко представленные в публикациях экспериментальные зависимости напряжение-деформация для КМ разной компоновки.

Как указано выше, на первом этапе линеаризации по исходным данным зависимости напряжение-деформация строится зависимость напряжения Муни $f_m = f_m(L)$ от обратной величины удлинения $(1/L)$. На втором этапе линеаризации полученная экспериментальная зависимость аппроксимируется на отдельных интервалах изменения аргумента $(1/L)$ линейной функцией $C_1 + C_2/L$. Длина интервала определяется получением высокого значения коэффициента корреляции R^2 (в настоящей работе $R^2 = 0,97 - 0,98$). Интервалы могут перекрываться.

На *рис. 1а* приведена выборка из большой серии зависимостей напряжение-деформация, полученных для КМ на основе пластифицированного глицидилазидного полимера GAP разной функциональности с варьированием типа, содержания и фракционного состава наполнителей, содержания отверждающего агента и адгезионных добавок [7]. При этом реализуются практически все виды характерных зависимостей напряжение-деформация [2]. Условия испытаний фиксированы. На *рис. 1б* представлены результаты первого этапа линеаризации для всех композиций, а в *табл. 1* – результаты второго этапа линеаризации в виде линейных регрессионных зависимостей коэффициента регрессии C_2 от C_1 с указанием значений коэффициентов корреляции R^2 .

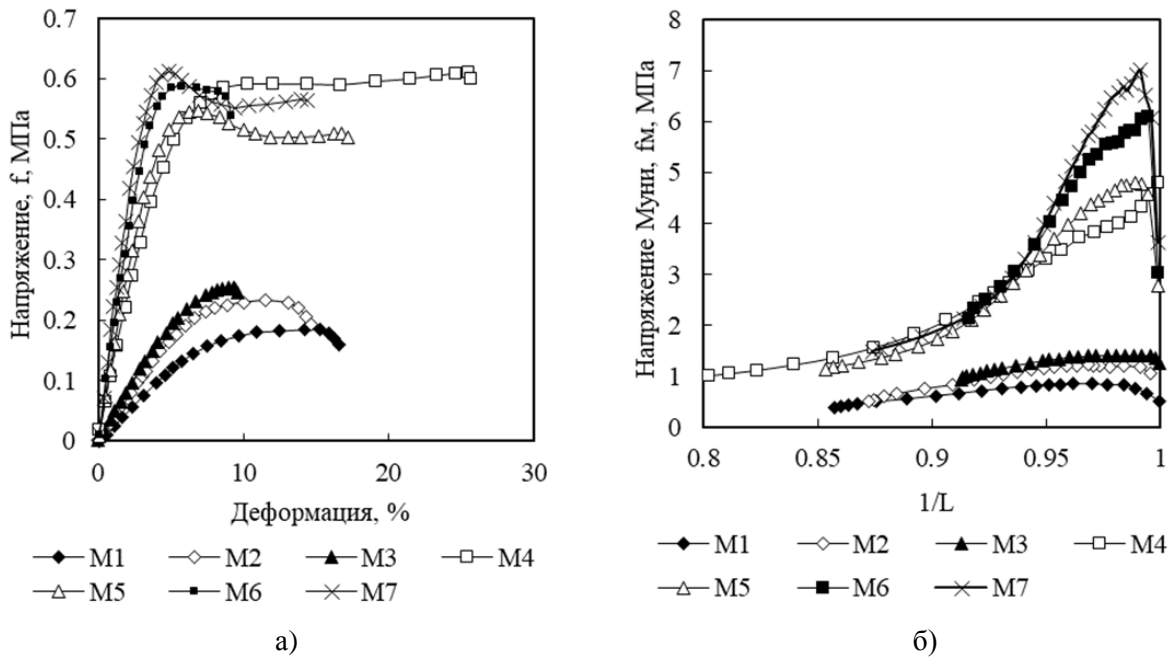


Рис. 1. Зависимость напряжения от характеристик деформации образцов:
 а) – исходные данные; б) – после первого этапа линеаризации

Результаты второго этапа линеаризации

Шифр образца	Уравнение регрессии	R ²
M1	$C_2 = -1,02C_1 + 1,01$	0,9997
M2	$C_2 = -1,03C_1 + 1,38$	0,9997
M3	$C_2 = -1,01C_1 + 1,70$	0,9996
M4	$C_2 = -1,01C_1 + 3,84$	0,9996
M5	$C_2 = -1,00C_1 + 4,59$	0,9999
M6	$C_2 = -1,00C_1 + 6,33$	1
M7	$C_2 = -1,00C_1 + 6,38$	0,9999

Значения коэффициентов C_1 и C_2 для каждого образца получены в результате кусочно-непрерывной линейной аппроксимации данных *рис. 1б* в виде линейных зависимостей $C_1 + C_2/L$ (формула (1)). Для всех композиций (M1 – M7) реализуются линейные зависимости $C_2 \approx -k \times C_1 + d$ во всей области значений деформации образцов. Значение коэффициента регрессии k незначительно отличается от 1 – стандартное отклонение не превышает 1 %, а значение $d \approx E/(2,5-3)$ – стандартное отклонение от среднего значения не превышает 10 %, – хорошо соответствует формуле (2). Прямое использование формулы (2) для нормировки значения суммы $C_1 + C_2$ и определения связи свободного члена уравнения регрессии с модулем упругости по экспериментальным данным затруднено. В качестве значений начального модуля упругости E выбиралось значение модуля упругости при уровне деформации образцов $\varepsilon = 2\%$ или $\varepsilon = 5\%$. Построение обобщенной линейной зависимости C_2 от C_1 в виде $C_2 \approx -C_1 + 1$ получается делением правой и левой части каждого из уравнений регрессии (*табл. 1*) на значение свободного члена. Необходимо отметить уникально высокие значения коэффициентов корреляции R^2 (*табл. 1*).

На *рис. 2* приведены результаты испытаний на одноосное растяжение с фиксированной скоростью шести образцов (шифр образцов A1 – A6) КМ на основе полиуретанового эластомера, наполненного частицами хлорида калия [8]. Такого типа данные представляют несомненный практический интерес. Варьируемыми переменными являются длина и площадь поперечного сечения образцов [8]. Результаты первого этапа линеаризации зависимостей *рис. 2* качественно аналогичны результатам, показанным на *рис. 1б*. В *табл. 2* представлены регрессионные зависимости коэффициента C_2 от C_1 , значения коэффициентов корреляции R^2 и для иллюстрации интервалы изменения значений коэффициента регрессии C_1 .

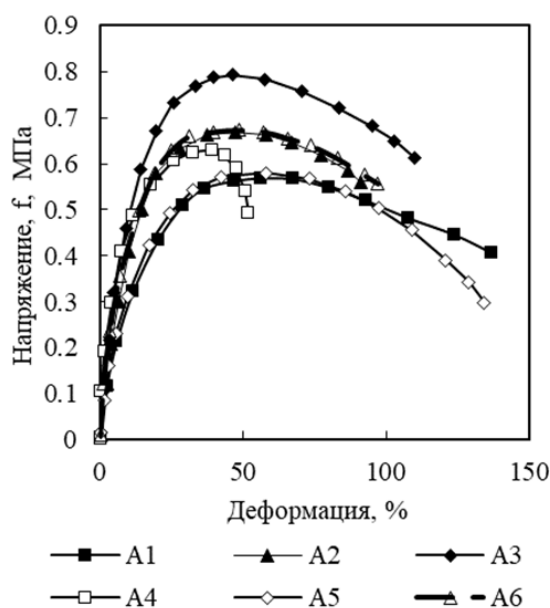


Рис. 2. Зависимости напряжение-деформация при варьировании размеров образцов

Результаты второго этапа линеаризации данных

Шифр образца	Уравнение регрессии; интервал изменения C_1	R^2
A1	$C_2 = -1,02C_1 + 1,31; -0,43 \leq C_1 \leq 62,3$	0,999
A2	$C_2 = -1,04C_1 + 1,62; -0,71 \leq C_1 \leq 6,3$	0,996
A3	$C_2 = -1,02C_1 + 1,99; -0,65 \leq C_1 \leq 14,11$	0,996
A4	$C_2 = -1,03C_1 + 2,08; -16,8 \leq C_1 \leq -1,59$	1
A5	$C_2 = -1,06C_1 + 1,35; -12 \leq C_1 \leq 5,33$	0,998
A6	$C_2 = -1,01C_1 + 1,93; -29,2 \leq C_1 \leq 0,64$	0,999

Значения C_1 и C_2 для каждого образца получены в результате кусочно-непрерывной линейной аппроксимации результатов первого этапа аппроксимации в виде линейных зависимостей $C_1 + C_2/L$ (формула 1). Для каждого образца наблюдаются линейные зависимости C_2 от C_1 при всех значениях удлинения. Коэффициент регрессии (при переменной C_1) для всех образцов имеет отрицательное значение и по абсолютной величине близок к 1 – стандартное отклонение не превышает 2–3 %. Значения коэффициентов корреляции выше 0,99. Прямые параллельны и отличаются значением свободного члена уравнения регрессии.

Для всей совокупности зависимостей (рис. 2, табл. 2) значение свободного члена уравнения регрессии приближенно равно $E/(2,7-2,9)$ – стандартное отклонение не превышает 5 %, что хорошо соответствует формуле (2). Построение обобщенной линейной зависимости C_2 от C_1 описано в предыдущем примере.

Заключение

Представленные результаты подтверждают эффективность двухэтапной линеаризации зависимостей напряжение-деформация, полученных в условиях одноосного растяжения образцов, и для построения обобщенной зависимости. Использование общей формы уравнения Ривлина позволяет расширить подход, основанный на определении линейной взаимосвязи коэффициентов регрессии C_1 и C_2 , для анализа других условий нагружения.

Библиография

1. Hosford W.F. Mechanical behavior of materials. New York: Cambridge University Press, 2010. 419 p.
2. Мошев В.В., Свистков А.Л., Гаришин О.К., Евлампиева С.Е., Роговой А.А., Ковров В.Н., Комар Л.А., Голотина Л.А., Кожевникова Л.Л. Структурные механизмы формирования механических свойств зернистых полимерных композитов. Екатеринбург: УрО РАН. 1997. 508 с.
3. Milton G.W. Theory of Composites. New York: Cambridge University Press, 2004. 720 p.
4. Попок В.Н. Корреляция физико-механических характеристик смесевых энергетических материалов // Бутлеровские сообщения. 2017. Т. 49, № 3. С. 135–146.
5. Закс А. Статистическое оценивание. М.: Статистика, 1976. 598 с.
6. Treloar L.R.G. The Elasticity and related Properties of Rubbers // Rubber Reviews. 1974. V. 47. P. 625–696.
7. Cerri S., Bohn M.A., Menke K. Galfetti L. Characterization of ADN/GAP-Based and ADN/Desmophen-Based Propellant Formulations and Comparison with AP Analogues // Propellants, Explosives, Pyrotechnics. 2014. V. 39, N 2. P. 192–204.
8. Backhaus G. Mechanics and chemistry of solid propellants // Proceedings of the Fourth Symposium on Naval Structural Mechanics held at Purdue University. April 19–21, 1965. Lafayette, 1965. P. 283–291.