УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНОЙ НАГРУЗКОЙ

Абрегов М.Х., Нахушева Ф.М.*, Бицуев А.Б.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова

***fatima-nakhusheva@mail.ru**

В работе исследуется начально-краевая задача для уравнения теплопроводности с нелинейной нагрузкой. Доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи. Методом Фурье получено ее решение сведением к классической начально-краевой задаче для однородного уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, нелинейная нагрузка, метод Фурье, однозначная разрешимость.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION IN HEAT CONDUCTION WITH NONLINEAR LOAD

Abregov M.Kh., Nakhusheva F.M., Bitsuev A.B.

Kabardino-Balkarian State University

The work investigates the initial-boundary value problem for the heat conduction equation with a nonlinear load. The unique solvability of the problem under investigation is proven. Its solution is obtained using the Fourier method by reducing it to the classical initial-boundary value problem for the homogeneous heat conduction equation.

Keywords: heat conduction equation, nonlinear load, Fourier method, unique solvability.

В работе изучается на однозначную разрешимость модифицированный вариант одной из классических задач теории теплопроводности. Для тонкого однородного стержня длиной l, на боковой поверхности которого происходит конвективный теплообмен с внешней средой нулевой температуры с теплоизолированными концами и с известным начальным распределением температуры, требуется найти распределение температуры стержня. Будет рассмотрен случай, когда коэффициент теплообмена с внешней средой пропорционален ходу температуры в фиксированной точке стержня.

Пусть $u(x,t)$ температура стержня в точке x в момент времени t. Тогда математическая модель задачи может быть представлена в виде [1, 2]

$$u_t = a^2 u_{xx} - m u(\xi,t) u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{3}$$

где $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(x) \in C^2[0,l], \ \varphi(x) \ge 0, \ \varphi(0) = u(0,0), \ \varphi(l) = u(l,0), \varphi'(0) = u_x(0,0), \ \varphi'(l) = u_x(l,0). \tag{4}$$

Пусть решение задачи (1)–(3) существует. Введём обозначение $\mu(t) = u(\xi,t)$ и сведём решение задачи к решению системы

$$u_t = a^2 u_{xx} - \mu(t) u, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \tag{5}$$

$$u_x(0,t)=0, \quad u_x(l,t)=0, \quad 0\le t<+\infty, \tag{6}$$

$$u(x,0)=\varphi(x), \quad 0\le x\le l, \tag{7}$$

$$\mu(t)=u(\xi,t), \quad 0\le t<+\infty \tag{8}$$

относительно неизвестных $u(x,t)$ и $\mu(t)$. Задача (5)–(7) однозначно разрешима [2]. Её решение представимо в виде

$$u(x,t)=\exp(-\int_0^t \mu(s)ds)\cdot v(x,t), \tag{9}$$

где $v(x,t)$ – решение задачи

$$v_t=a^2v_{xx},\ v_x(0,t)=0,\ v_x(l,t)=0,\ v(x,0)=\varphi(x). \tag{10}$$

Таким образом, приходим к системе

$$u(x,t)=\exp(-\int_0^t \mu(s)ds)\cdot v(x,t), \quad u(\xi,t)=\mu(t). \tag{11}$$

Подставив в первое уравнение системы (11) $x=\xi$ и воспользовавшись вторым уравнением, приходим к уравнению относительно функции $\mu(t)$

$$\mu(t)\exp(\int_0^t \mu(s)ds)=v(\xi,t), \tag{12}$$

решение которого имеет вид

$$\mu(t)=v(\xi,t)\Big/(1+\int_0^t v(\xi,s)ds). \tag{13}$$

Заметим, что знаменатель в правой части (13) положителен. Из свойств функции $v(x,t)$ и представления (13) следует, что $\mu(t)$ дифференцируема на $(0,+\infty)$. Таким образом, задача (1)–(3) свелась к решению задачи (5)–(7), где функция $\mu(t)$ имеет вид (13). Из однозначной разрешимости задачи (5)–(7) следует однозначная разрешимость задачи (1)–(3) и её решение представляется через решение задачи (10) в виде

$$u(x,t)=v(x,t)\Big/(1+\int_0^t v(\xi,s)ds). \tag{14}$$

Функция $v(x,t)$ в представлении решения задачи (1)–(3) будет неотрицательной и ограниченной. При отсутствии теплообмена с внешней средой в стержне устанавливается постоянная температура, равная $\frac{a_0}{2}=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\,dx$. Из указанных свойств функции $v(x,t)$ следует, что знаменатель в правой части равенства (14) становится бесконечно большой величиной при $t\to+\infty$, и, таким образом, функция $u(x,t)$ стремится к нулю, то есть происходит остывание стержня за счёт теплообмена с внешней средой.

Библиография

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: МГУ, ММИ, 1952. 688 с.