

## ВЛИЯНИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДВИЖЕНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОНОВ В АКСИАЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫХ КРИСТАЛЛАХ

Хоконов М.Х., Ломаносов В.С.\*

*Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова*

\*slavaloman@bk.ru

*Теоретически изучена классическая сила радиационного трения для релятивистских электронов, проходящих через ориентированные кристаллы. Получены выражения для радиационного изменения поперечной энергии и углового момента, а также проведено их квазиклассическое обобщение. Приводятся численные расчеты для энергий 150 ГэВ – 4 ТэВ для кристалла германия.*

**Ключевые слова:** ориентированные кристаллы, излучение при каналировании, радиационный демпинг.

## INFLUENCE OF RADIATION ON THE MOTION OF ULTRARELATIVISTIC ELECTRONS IN AXIALLY ORIENTED CRYSTALS

Khokonov M.Kh., Lomanosov V.S.

*Kabardino-Balkarian State University*

*The classical radiative damping force for relativistic electrons passing through oriented crystals is studied theoretically. Expressions for the radiative change in the transverse energy and angular momentum are obtained, and their semiclassical generalizations are presented. Numerical calculations have been performed for energies of 150 GeV – 4 TeV for a germanium crystal.*

**Keywords:** oriented crystals, channeling radiation, radiative damping.

Вопрос о классической силе электромагнитного действия электрона на самого себя изучается более 100 лет, однако, в последнее время появилась возможность её экспериментального изучения [1] на примере движения электронов в кристаллах, ориентированных своими главными кристаллографическими направлениями вдоль вектора скорости электронов. Тема влияния излучения на движения электронов в таком режиме изучалась ещё в самом начале развития теории излучения при каналировании [2] и в более поздних работах [3], однако, развитие точности измерений делают эту задачу актуальной и сейчас. Другая возможность для экспериментального изучения силы радиационного трения открывается в связи с появлением сверхмощных петаваттных лазеров (см. ссылки в [3]). Между процессами в полях кристаллов и лазеров существует глубокая аналогия [4], однако, как справедливо отмечено авторами работы [1], ожидаемый эффект должен наиболее значимо проявиться именно при каналировании.

Принципиальное отличие лазеров от кристаллов заключается в том, что параметр недипольности излучения  $\nu = \beta_{\perp} \gamma$  для лазерной волны не зависит от энергии движущейся в ней частицы и определяется отношением напряжённости лазерного поля к его частоте, тогда как в кристаллах  $\nu \approx \theta_L \gamma$  и растёт с ростом энергии пропорционально  $\gamma^{1/2}$ ; здесь  $\gamma = E/(mc^2)$  – Лоренц-фактор электрона с энергией  $E$  и массой покоя  $m$ ,  $c$  – скорость света,  $\theta_L = (4Ze^2/dE)^{1/2}$  – критический угол Линдхарда,  $Z$  – атомный номер кристалла,  $d$  – расстояние между атомами в атомной цепочке вдоль выбранного направления в кристалле,  $\beta_{\perp}$  – поперечная по отношению к кристаллографическому направлению скорость электрона (в единицах скорости света). Это приводит к тому, что в полях петаваттных лазеров параметр  $\nu$  может

достигать нескольких сотен, тогда как в кристаллах, даже при ТэВ-ных энергиях этот параметр на порядок меньше. С другой стороны, параметр, определяющий эффекты квантовой электродинамики  $\chi$  даже для лазеров петаваттной мощности не превышает единицу, тогда как в тяжёлых кристаллах этот параметр может быть  $\chi \gg 1$  уже при энергиях в сотни ГэВ, здесь  $\chi = \hbar F \gamma / (m^2 c^3)$ , где  $F$  есть сила, действующая на электрон со стороны внешнего поля. В ориентированных кристаллах эта сила носит поперечный характер по отношению к направлению движения электрона и перпендикулярна атомным цепочкам (плоскостям), причём  $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = e\mathbf{E} = -\nabla_{\perp} U$ , где  $\mathbf{r} = (x, y)$  – координата электрона в плоскости, перпендикулярной атомной цепочке, направление которой определяется осью  $z$ ,  $U(\mathbf{r})$  – непрерывный потенциал атомной цепочки (плоскости). Далее, обозначение напряжённости электрического поля атомной цепочки  $\mathbf{E}$  той же буквой, что и энергия электрона недоразумений не вызовет.

Поперечная составляющая классической силы радиационного трения в приближении Ландау–Лифшица для электрона, движущегося в статическом электрическом поле с напряжённостью  $\mathbf{E}$  имеет вид [5]

$$\mathbf{f}_{\perp} = \frac{2e}{3} r_0 \gamma (\boldsymbol{\beta}_{\perp} \nabla_{\perp}) \mathbf{E} + \frac{2}{3} r_0^2 (\boldsymbol{\beta}_{\perp} \mathbf{E}) \mathbf{E} + \boldsymbol{\beta}_{\perp} \left( \frac{dW}{cdt} \right)_{cl} + \frac{2}{3} r_0^2 \gamma^2 \boldsymbol{\beta}_{\perp} (\boldsymbol{\beta}_{\perp} \mathbf{E})^2, \quad (1)$$

где  $r_0 = e^2 / (mc^2)$ ,  $\boldsymbol{\beta}_{\perp} = (\beta_x, \beta_y)$  – поперечная составляющая скорости, классические потери энергии за единицу времени определяются как

$$\left( \frac{dW}{dt} \right)_{cl} = -\frac{2c}{3e^2} r_0^2 \gamma^2 (\nabla_{\perp} U)^2. \quad (2)$$

Продольная составляющая силы радиационного трения равна  $f_z = \beta_z (dW/cdt)_{cl}$ . Детальный анализ классического уравнения (1) применительно к ориентированным кристаллам представлен в работе [6].

Оценим порядок величины каждого члена в (1), для чего учтём, что  $|\nabla_{\perp} U| \approx U_0/a$ , где  $U_0$  – глубина потенциальной ямы атомной цепочки (плоскости),  $a$  – параметр экранирования Томаса-Ферми,  $\beta_{\perp} \approx \theta_L \ll 1$ . Тогда получаем, что вторым и последним членами в (1) можно пренебречь (см. также [1]), а отношение первого члена к третьему примерно равно  $\eta \approx mc^2 / (\gamma U_0)$ . Поскольку  $U_0 \approx 2Ze^2/d$  (для алмаза  $\langle 111 \rangle$   $U_0 \approx 100$  эВ), то получаем, что первый член в (1) доминирует при относительно низких энергиях, не превышающих 10 ГэВ. Величину  $\eta$  можно интерпретировать как отношение энергии электрона  $E$  к характерной энергии излучаемого фотона  $\omega$ . Тогда условием, когда можно пренебречь третьим членом в (1) является условие классичности процесса излучения  $\omega \ll E$ . Квазиклассическое обобщение выражения (1) можно получить заменой (2) квантовой формулой для сечения излучения [7, 8].

Уравнение движения электрона в поле непрерывного потенциала атомных цепочек будет

$$\frac{d\mathbf{p}_{\perp}}{dt} = -\nabla U(\mathbf{r}) + \mathbf{f}_{\perp}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{p}_{\perp} = \gamma mc \boldsymbol{\beta}_{\perp}$  – поперечный импульс. Для продольного импульса имеем  $dp_z/dt = f_z$ .

Практический интерес представляет собой скорость изменения поперечной энергии электрона

$$\varepsilon = \frac{\mathbf{p}_{\perp}^2}{2m\gamma} + U(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Величина (4) является интегралом поперечного движения в поле непрерывного потенциала в отсутствии радиационного трения. Дифференцируя (4) по времени с учётом существенных членов в (1) получаем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3} r_0 e \gamma c \boldsymbol{\beta}_{\perp} (\boldsymbol{\beta}_{\perp} \nabla_{\perp}) \mathbf{E} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_{\perp}^2 \left( \frac{dW}{dt} \right)_{cl}. \quad (5)$$

При аксиальном каналировании аналогичное уравнение следует записать и для углового момента относительно атомной оси  $\mu = xp_y - yp_x$ .

На практике энергия электрона слабо меняется за счёт излучения на периоде его поперечных осцилляций  $T$ . Поэтому представляют интерес величины, усреднённые по периоду поперечных колебаний. Согласно (5) в случае потенциала с аксиальной симметрией  $U(r)$  усреднённые по периоду  $T$  скорости изменения поперечной энергии и углового момента равны

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\gamma^2} \left\langle \left( \frac{dW}{dt} \right)_{cl} \right\rangle + \left\langle \frac{(\varepsilon - U)}{E} \left( \frac{dW}{dt} \right)_{cl} \right\rangle, \quad (6)$$

$$\left\langle \frac{d\mu}{dt} \right\rangle = \frac{\mu}{E} \left[ -\frac{2}{3} r_0 c \gamma \left\langle \frac{U'}{r} \right\rangle + \left\langle \left( \frac{dW}{dt} \right)_{cl} \right\rangle \right], \quad (7)$$

где  $U' = dU/dr$ , а угловые скобки означают усреднение по периоду поперечных радиальных осцилляций

$$\langle (\dots) \rangle = \frac{1}{cT} \oint (\dots) \frac{dr}{\beta_r}, \quad (8)$$

где  $\beta_r$  – радиальная поперечная скорость, так что  $\beta_{\perp}^2 = \beta_r^2 + \beta_{\varphi}^2$ ,  $c\beta_{\varphi} = r d\varphi/dt = \mu c^2/(Er)$ ,  $\mu = m\gamma r c\beta_{\varphi}$ ,  $\varphi$  – азимутальный угол электрона в поперечной плоскости. При выводе (6) и (7) из (5) мы провели интегрирование по частям в выражении (8).

Из (6) видно, что поперечная энергия всегда уменьшается за счёт излучения. Альтернативным эффектом, но увеличивающим поперечную энергию, является многократное рассеяние электрона на тепловых колебаниях атомов кристалла [9]. Соответствующее среднее изменение поперечной энергии равно

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dz} \right\rangle_{scatt} = \frac{E}{2} \left( \frac{\Delta\theta^2}{\Delta z} \right)_{am} \langle P(r) \rangle, \quad (9)$$

где  $z = ct$ ,

$$\left( \frac{\Delta\theta^2}{\Delta z} \right)_{am} = 16\pi N \left( \frac{Ze^2}{E} \right)^2 \ln(183Z^{-1/3}), \quad (10)$$

среднеквадратичный угол многократного рассеяния в аморфной среде на единице длины пути,  $N$  – число атомов мишени в единице объёма,

$$P(r) = \frac{1}{\pi u_{\perp}^2} \exp\left(-\frac{r^2}{u_{\perp}^2}\right), \quad (11)$$

где  $u_{\perp}$  – средняя амплитуда тепловых колебаний атомов цепочки.

Для адекватной оценки характера изменения поперечной энергии в результате излучения и многократного рассеяния необходимо знать также и среднеквадратичное приращение  $\overline{\Delta\varepsilon^2}/\Delta z$ . В случае излучения эта величина получается усреднением по периоду поперечного движения выражения

$$\frac{\overline{\Delta\varepsilon^2}}{\Delta z} = \int \delta\varepsilon^2(\omega) w_{\omega} d\omega, \quad (12)$$

где  $w_{\omega} d\omega$  есть вероятность излучить фотон с энергией  $\omega$  на единице длины,  $\delta\varepsilon(\omega)$  – соответствующее изменение поперечной энергии (см. формулу (26) в [10]). В наших расчетах для вероятности излучения  $w_{\omega} d\omega$  мы брали квантовые выражения в приближении постоянного поля [7]. Полные потери энергии на излучение на единице длины пути, которые входят в (6) и (7) мы также вычисляли с учётом квантовых эффектов

$$\left( \frac{dW}{cdt} \right)_{quant} = \int \omega w_{\omega} d\omega. \quad (13)$$

На рис. 1 показаны среднее (А) и среднеквадратичное (В) приращения поперечной энергии на единице длины за счёт излучения (6) в кристалле германия <110>, охлаждённого до 100К ( $U_0 = 303$  эВ), как функция поперечной энергии (заданной в единицах глубины потенциального барьера  $U_0$ ), для различных энергий электронов. Все кривые на рисунке усреднены также по угловым моментам. Пунктирные линии соответствуют тем же величинам для многократного рассеяния (9), причём учитывалось, что среднеквадратичное изменение поперечной энергии для многократного рассеяния связано со среднеквадратичным углом многократного рассеяния как [11]

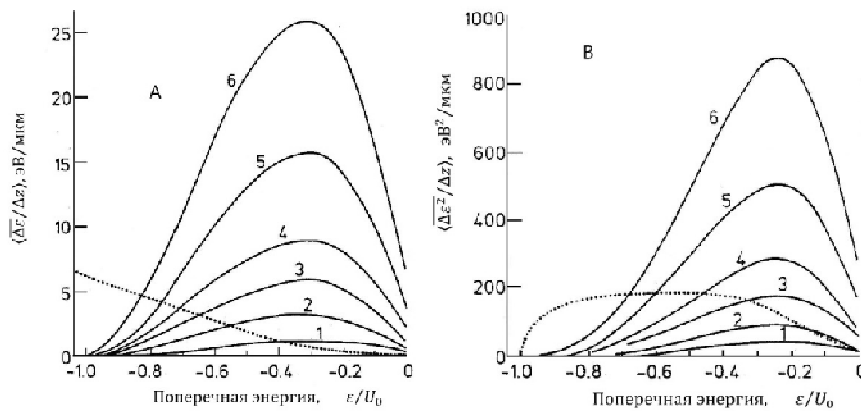


Рис. 1. Среднее (А) и среднеквадратичное (В) приращение поперечной энергии на единице длины в кристалле германия <110> как функция поперечной энергии для различных энергий электронов:

1 – 150 ГэВ; 2 – 300 ГэВ; 3 – 600 ГэВ; 4 – 1 ТэВ; 5 – 2 ТэВ; 6 – 4 ТэВ. Пунктирные линии – соответствующие величины для многократного рассеяния при энергии 150 ГэВ

$$\overline{\Delta\varepsilon^2} = E[\varepsilon - U(r)]\Delta\theta^2(r), \quad (14)$$

где зависимость среднеквадратичного угла рассеяния от расстояния до атомной цепочки определяется формулой (11). На верхнем рис. 1В приведены значения этой величины, делённые на 2 в соответствии с множителем в диффузионных уравнениях. Положительные поперечные энергии соответствуют квази-каналированным частицам с инфинитными поперечными траекториями и здесь не рассматриваются.

Результаты расчётов среднего и среднеквадратичного изменения поперечной энергии за счёт излучения для кристалла германия, ориентированного вдоль оси  $\langle 110 \rangle$  представлены на рис. 1В для электронов с энергиями от 150 ГэВ до 4 ТэВ в зависимости от поперечной энергии, заданной в единицах глубины потенциальной ямы. Пунктирными линиями показаны эти же величины для многократного рассеяния при энергии пучка 150 ГэВ. Учитываются только каналированные электроны, поперечная энергия которых отрицательна. Демпинг поперечной энергии на единице длины пути показан на нижнем рис. 1А, причём представлено абсолютное значение этой величины. На верхнем рис. 1В показано среднеквадратичное приращение поперечной энергии. Из рисунка следует, что указанные величины сильно зависят от поперечной энергии, достигая своего максимума при поперечных энергиях  $\varepsilon \approx -(0,2 - 0,3)U_0$ .

Для рассматриваемых энергий уменьшение поперечной энергии из-за излучения преобладает над её увеличением за счёт многократного рассеяния. При  $E = 150$  ГэВ среднеквадратичное изменение поперечной энергии за счёт излучения и за счёт многократного рассеяния примерно равны друг другу для основной части пучка электронов, большинство из которых сосредоточено в области с  $\varepsilon = 0$ . Этим объясняется хорошее согласие с экспериментом расчетов спектров излучения при энергии 150 ГэВ в приближении постоянной поперечной энергии [9]. При больших энергиях радиационное уменьшение поперечной энергии будет сильно доминировать.

Заметим, что классическое выражение (6) допускает квантовую интерпретацию. Так, первый член в (6) является классическим аналогом квантовых дипольных переходов между состояниями поперечной энергии, которые приводят к пикам в спектре излучения при каналировании при энергиях, не превышающих 100 МэВ [6].

### Библиография

1. Piazza A.Di., Wistisen T. N., Uggerhoj U.I. Investigation of classical radiation reaction with aligned crystals // Phys. Lett. B. 2017. V. 765. P. 1–5.
2. Базылев В.А., Жеваго Н.К. Влияние излучения на движение каналированных частиц // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. С. 1267–1275.
3. Бекулова И.З., Хоконов М.Х. Радиационное уменьшение поперечной энергии электронов во внешнем поле и в ориентированных кристаллах // Вестник КБГУ. Серия физическая. 2008. В.11. С. 49–51.
4. Khokonov M.Kh., Carrigan Jr. R.A. The relationship of channeling radiation to Thomson scattering and the relative efficiency of X-ray production by intense electron beams // Nucl. Inst. and Meth. in Phys. Res. B. 1998. V. 145. P. 133–141.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988. 512 с.
6. Khokonov M.Kh. On the quantum interpretation of the classical Schott term in the theory of radiation damping // Physics Letters B. 2019. V. 791. P. 281–286.
7. Khokonov M.Kh., Efendiev K.V. High energy limit of single photon channeling radiation spectrum // Nucl. Inst. and Meth. in Phys. Res. B. 2006. V. 252. P. 36–43.
8. Khokonov M.Kh., Nitta H. A Standard Radiation Spectrum of Relativistic Electrons: Beyond Synchrotron Approximation // Phys. Rev. Lett. 2002. No. 9. V. 89. 094801.
9. Khokonov M.Kh., Tuguz F.K. Some new aspects of axial electron channeling process // Nucl. Inst. and Meth. in Phys. Res. B. 1993. V. 82. P. 46–51.
10. Хоконов М.Х. Угловые распределения релятивистских заряженных частиц в ориентированных кристаллах // ЖЭТФ. 1993. Т. 103. С. 1723–1741.
11. Телегин В.И., Хоконов М.Х. Аксиальное каналирование ультрарелятивистских электронов // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 260–274.